Autor: Carsten Stahl

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{\mu}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu \\
&= \frac{n}{n}\mu = \mu
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{s}^2) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\hat{\mu}+\hat{\mu}^2)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\hat{\mu}^2\right]\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\hat{\mu}^2+n\hat{\mu}^2\right]\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\hat{\mu}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i^2)-\frac{n}{n-1}\mathbb{E}(\hat{\mu}^2) \\
&= \frac{n}{n-1}[Var(X_i)+\mathbb{E}(X_i)^2]-\frac{n}{n-1}[Var(\hat{\mu})+\mathbb{E}(\hat{\mu})^2] \\
&= \frac{n}{n-1}[\sigma^2+\mu^2]-\frac{n}{n-1}\left[\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right] \\
&= \frac{n}{n-1}\sigma^2-\frac{1}{n-1}\sigma^2=\frac{n-1}{n-1}\sigma^2=\sigma^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a)

Geschätzt wird der Mittelwert mit zwei verschiedenen gewichteten Durchschnitten.

b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_1) &= \frac{2}{2}\mathbb{E}(X_1) = \mu \\
\mathbb{E}(T_2) &= \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right)\mathbb{E}(X_1) = \frac{8}{8}\mu
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{1}{2}(3.1 + 1.8) = 2.45 \\
t_2 &= \frac{1}{8}(3 \cdot 3.1 + 5 \cdot 1.8) = 2.28
\end{aligned}
$$

Also t_2 ist näher dran

d)

$$
\begin{aligned}
Var(T_1) &= \frac{1}{4}(Var(X_1) + Var(X_2)) = \frac{\sigma^2}{2} \\
Var(T_2) &= \frac{1}{64}(9Var(X_1) + 25Var(X_2)) = \frac{34}{64}\sigma^2
\end{aligned}
$$

e)

Da beide Schätzer erwartungstreu sind und die Varianz und Bias-Zerlegung gilt, ist der Schätzer mit der kleineren Varianz besser. In diesem Fall ist das das ganz normal arithmetische Mittel.

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{21}(10 \cdot 13 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 28) \\
&= 18 \\
\hat{s}^2 &= \frac{1}{21-1}\left(10 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot 10^2\right) = 43.5
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Als Schätzung können wir einfach die relative Häufigkeit verwenden, welche Leute mehr als oder gleich 2 Stunden Fernsehen hatten. In dem Fall war das 55%

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}R_A + \frac{1}{2}R_B\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(R_A) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(R_B) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\% + \frac{1}{2}\cdot 5\% = 3\% \\
Var\left(\frac{1}{2}R_A + \frac{1}{2}R_B\right) &= \frac{1}{4}Var(R_A) + \frac{1}{4}Var(R_B) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 15 = 4\%
\end{aligned}$$

Und damit ist die Wahrscheinlichkeit (über normen):

$$\begin{aligned}
P(\tilde{P} \geq 5\%) &= 1 - P(\tilde{P} \leq 5\%) \\
&= 1 - P\left(\frac{\tilde{P} - 3\%}{2\%} \leq 1\%\right) \\
&= 1 - \Phi(1) = 15.8\%
\end{aligned}$$

b)

Das Optimierung-Problem ist hier:

$$\begin{aligned}
&\arg\min_{\alpha\in[0,1]} Var(\alpha R_C + (1-\alpha)R_D) \\
\iff &\arg\min_{\alpha\in[0,1]} \alpha^2 Var(R_C) + (1-\alpha)^2 Var(R_D) \\
\iff &\arg\min_{\alpha\in[0,1]} 5\alpha^2 - (1 - 2\alpha + \alpha^2)10 \\
\iff &\arg\min_{\alpha\in[0,1]} 15\alpha^2 - 20\alpha + 10
\end{aligned}$$

BEO:

$$30\alpha - 20 = 0 \iff \alpha = \frac{2}{3}$$

BZO:

$$30 > 0$$

Also stecke $\frac{2}{3}$ des Vermögens in Anlage C und den Rest in Anlage D

Aufgabe 6

a)

$$\text{Anzahl der richtigen Antworten} = X \sim Bin(20, 25\%)$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 20 \cdot 40\%) &= 1 - P(X < 8) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{7} P(X = i) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{7} \binom{20}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{20-i} \\
&= 10.2\%
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

a)

Für die Intervallschätzung nehmen wir die Formel aus der Vorlesung:

$$t_{l,o}(X) = \bar{X} \pm t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{s}^2}{n}}$$

Das führ zu den Grenzen:

$$t_l(X) \approx 784.9 \quad t_o(X) \approx 1379.4$$

b)

Hier landen wir bei der Bedingung:

$$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{s}^2}{n}} = 250$$

Lösen nach α ergibt:

$$\alpha \approx 9.4\%$$

Aufgabe 8

Da es sich bei dem test-problem um normalverteilte iid Zufallsvariablen handelt, können wir den T-test verwenden. Hier ist die Teststatistik:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \\
&= \frac{\bar{X} - 115}{\frac{15}{5}} = \frac{\bar{X} - 115}{3}
\end{aligned}
$$

Da wir $\alpha = 5\%$ gegeben haben müssen wir nach C lösen um den kritischen Bereich festzulegen:

$$
\begin{aligned}
P(T \leq C) &= 5\% \\
\Phi(C) &= 5\% \\
C &= -1.645
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich die Entscheidungsregel:

$$
T(X) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } T \leq -1.645 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}
$$

b)
Erste Art: Falsche Ablehnung:

- Man nimmt fälschlicherweise an, dass Studenten einen höheren IQ haben
  Zweiter Art: Falsche Annahme:
- Man nimmer fälschlicherweise an, dass Studenten einen durchschnittlichen IQ haben

c)

$$
\begin{aligned}
P(T \leq -1.645) &= P\left(\frac{\bar{X} - 115}{3} - \frac{2}{3} \leq -1.645 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \Phi\left(-1.645 - \frac{2}{3}\right) \approx 1.04\%
\end{aligned}
$$

d)
Jetzt unter μ_2: Wir sind nur daran interessiert die Norm der Zufallsvariable zu finden. Daher verschieben wir die Ungleichung derart, dass wir annehmen können, dass sich auf der linken Seite eine standardnormale Zufallsvariable befindet.

$$\begin{aligned}
P(\text{Fehler zweiter Art machen}) &= P(T(X)=0) \\
&= 1 - P(T(X)=1) \\
&= 1 - P(T \leq -1.645) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X}-115}{3} + \frac{3}{3} \leq -1.645 + 1\right) \\
&= 1 - \Phi(-1.645+1) \approx 26\%
\end{aligned}$$

Und genau das machen wir auch unter μ_3 und erhalten:

$$\begin{aligned}
P(\text{Fehler zweiter Art machen}) &= 1 - P(T(X)=1) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X}-115}{3} + \frac{7}{3} \leq -1.645 + \frac{7}{3}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-1.645 + \frac{7}{3}\right) \approx 75.4\%
\end{aligned}$$

f)

Die Teststatistik ist hier:

$$\frac{\bar{X}-115}{\frac{\sqrt{16.81}}{\sqrt{25}}} = \frac{112-115}{\frac{\sqrt{16.81}}{5}} = -3.659 < -1.645$$

Also verwerfe H_0

g)

Verwerfe falls:

$$KI(X) = \left(-\infty, \bar{X} + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

Verwerfe falls:

$$\mu_3 \notin KI(X)$$

Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
H_0 &: \text{Anteil der Wähler für R.} \geq 50\% \\
H_1 &: \text{Anteil der Wähler für R.} < 50\%
\end{aligned}$$

Also wieder ein einseitiger Test.

Wir können die Wählerschaft auch als binominalverteilte Zufallsvariable interpretieren:

$$W \sim Bin(500, p)$$

In dem Fall lassen sich die Hypothesen folgendermaßen formulieren:

$$H_0 : p \geq 0.5 \quad H_1 : p < 0.5$$

Und der zentrale Grenzwertsatz sagt uns:

$$T(W) = \frac{W - \mathbb{E}_{p=0.5}(W)}{\sqrt{Var_{p=0.5}(W)}} = \frac{W - 250}{\sqrt{500 \cdot 0.5^2}} = \frac{W - 250}{\sqrt{125}} \approx \mathcal{N}(0, 1)$$

Das können wir jetzt nutzen, um den p-Wert auszurechnen:

$$\begin{aligned} & w = 230 \\ \implies P\left(T(W) \leq \frac{230 - 250}{\sqrt{125}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{20}{\sqrt{125}}\right) \\ \approx 4.51\% > 1\% \end{aligned}$$

Da der p-Wert größer ist, können wir H_0 verwerfen.

b)

Die allgemeine Teststatistik ist nun:

$$t = \frac{n \cdot 0.46 - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.5^2}}$$

Und die Bedingung ist:

$$\Phi(t) \leq 1\%$$

Für welches n fällt also der p-Wert unter 1%.

Einsetzen führt zu:

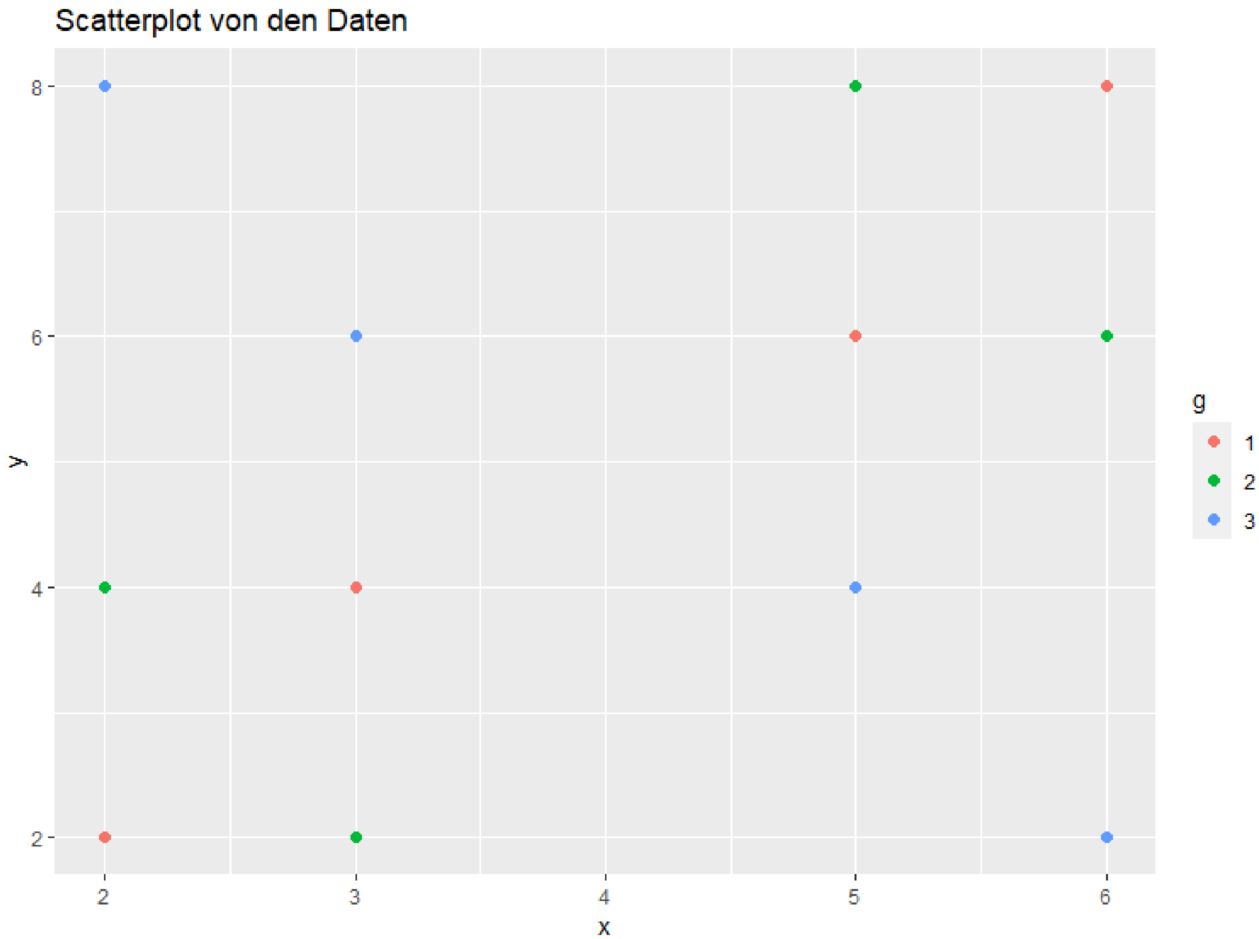
$$\Phi\left(\frac{-n \cdot 4\%}{\sqrt{n \cdot 0.5^2}}\right) = 1\%$$

Nach n auflösen und man bekommt:

$$n > 848$$

Aufgabe 10

a)



b)

Die Formel für die Korrelation ist:

$$\hat{cor}(x,y) = \frac{\hat{Cov}(x,y)}{\sqrt{\hat{Var}(x)\hat{Var}(y)}}$$

Daraus ergeben sich die Korrelationen:

$$1) \approx 0.9899$$
$$2) \approx 0.707$$
$$3) \approx -0.9899$$

c)

Für die regression ergeben sich die geschätzten Koeffizienten:

$$1)\hat{\beta}_0 = 1.4, \hat{\beta}_1 = -0.6$$
$$2)\hat{\beta}_0 = 1, \hat{\beta}_1 = 1$$
$$3)\hat{\beta}_0 = -1.4, \hat{\beta}_1 = 10.6$$

d)

Einfach in:

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

einsetzen. Das ergibt dann:

$$\hat{y}_1 = 9.2$$
$$\hat{y}_2 = 8$$
$$\hat{y}_3 = 0.8$$