Autor: Carsten Stahl

Manche der Aufgaben sind sehr formal und korrekt aufgeschrieben, ich hoffe aber die Kern-Idee dringt trotzdem durch.

Aufgabe 1

a)

$$\Omega = \{Z, K\}^4$$

Wegen 4 Observationen und einer Münze auf der Zahl und Kopf realisiert werden können.

b)

$$\begin{aligned} A = \{&(K,K,K,K),(Z,K,K,K),\\ &(K,Z,K,K),(K,K,Z,K)\\ &(K,K,K,Z)\}\\ B = \{&(K,K,K,K),(K,K,K,Z),\\ &(Z,K,K,K),(Z,K,K,Z)\} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A \cap B = \{&(K,K,K,K),(K,K,K,Z),(Z,K,K,K)\}\\ B \cup B = \{&(K,K,K,K),(Z,K,K,K),\\ &(K,Z,K,K),(K,K,Z,K)\\ &(K,K,K,Z),(Z,K,K,Z)\} \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \Omega \setminus A\\ \bar{B} &= \Omega \setminus B \end{aligned}$$

Also das Komplement ergibt sich einfach aus dem weglassen der Elemente aus A bzw. B aus allen möglichen Elementen aus Ω.

d)

$$A \cap B \neq \emptyset$$

Der Schnitt ist nicht leer. Deswegen auch nicht disjunkt. Das bedeutet aber auch, dass $A \cap B$ nicht das Komplement ist (da das Komplement auch disjunkt sein muss).

e)

Einfache Lösung: $C = \emptyset$

$$\implies C \cap B = \emptyset \land A \cap C = \emptyset$$

f)

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{16} \\ P(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\ P(A \cap B) &= \frac{3}{16} \\ P(A \cup B) &= \frac{6}{16} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$\Omega = \{\text{rot}, \text{grün}, \text{gelb}, \text{blau}\}$$

Mit:

$$P(\omega) = \frac{1}{4} \quad \forall \omega \in \Omega$$

b)

$$\begin{aligned} P(\text{mind. einmal rot}) &= 1 - P(\text{keinmal rot}) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ &= \frac{37}{64} \end{aligned}$$

c)

Aus der Aufgabe ergibt sich die Bedingung:

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0.95$$

Lösen nach n und man bekommt:

$$n > 11$$

Aufgabe 3

Wird nicht in der Aufgabe gesagt, aber wir gehen davon aus, dass:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{4} \quad \forall \omega \in \Omega$$

Daraus ergeben sich die Mengen gegeben der Bedingungen:

$$\begin{aligned} A &= \{1,2\} \\ B &= \{1,3\} \\ C &= \{1,4\} \end{aligned}$$

Da:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(A)P(B) \\ P(B \cap C) &= P(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(B)P(C) \\ P(A \cap C) &= \frac{1}{4} = P(A)P(C) \end{aligned}$$

Und:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} X &\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ Y &= 4X + 7 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert und die Varianz:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(4X+7) \\ &= 4\mathbb{E}(X) + 7 \\ &= 4\mu + 7 \\ Var(Y) &= Var(4X+7) \\ &= Var(4X+7) \\ &= 16Var(X) = 16\sigma^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma}[\mathbb{E}(X)-\mu] \\
&= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu] = 0 \\
Var(Z) &= Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}Var(X) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\sigma X + \mu) \\
&= \sigma\mathbb{E}(X) + \mu \\
&= \sigma \cdot 0 + \mu = \mu \\
Var(X) &= Var(\sigma Z + \mu) \\
&= \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2
\end{aligned}$$

c)

Es gilt, dass:

$$X \sim \mathcal{N}(6,4) \implies \frac{X-6}{2}$$

Wir können diese Eigenschaft nutzen:

$$\begin{aligned}
P(|X| \leq 4) &= P(-4 \leq X \leq 4) \\
&= P\left(-10 \leq X-6 \leq -2\right) \\
&= P\left(-5 \leq \frac{X-6}{2} \leq -1\right) \\
&= \Phi(-1) - \Phi(-5) = 0.15
\end{aligned}$$

Außerdem gilt, dass:

$$P(|X| \geq 4) = 1 - P(|X| < 4) = 1 - 0.15 = 0.85$$

Aufgabe 6

a)
Ja denn die Eigenschaften der Verteilungsfunktion sind erfüllt:

$$\begin{aligned} F(x) &\in [0,1] \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ F(x) &\leq F(y) \quad \forall x \leq y \end{aligned}$$

b)
Nein, da:

$$f(0) = \infty$$

Damit wir diese Unstetigkeit bei $F(0)$ haben.
c)

$$P(-1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-1) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

Aufgabe 7

a)
Wir können sagen dass:

$$\text{Anzahl der Faulen Früchte} = X \sim Binom(40, 5\%)$$

Somit:

$$\begin{aligned} P(\text{Händler behält die Kist}) &= P(X \leq 3) \\ &= \sum_{i=0}^{3} P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{3} \binom{40}{i} 0.05^i 0.95^{40-i} \\ &\approx 86.19\% \end{aligned}$$

Und daraus kann man schlussfolgern:

$$\begin{aligned} P(\text{Händler gibt die Kiste zurück}) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - 86.19\% = 13.81\% \end{aligned}$$

b)
Generell gilt:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Für X_i iid und mit endlicher Varianz und Erwartungswert.
Da jetzt:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad X_i \sim \text{Bernoulli}(P(\text{Händler gibt die Kiste zurück}))$$

Und:

$$n\mu = \mathbb{E}(X) \quad \sqrt{Var(X)} = \sqrt{n}\sigma$$

Können wir sagen dass:

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Bei einer Stichprobengröße n von 100 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 100 \cdot 13.81\% = 13.81 \\ Var(X) &= 100 \cdot 13.81\% \cdot 86.19\% \approx 11.903 \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} P(X \leq 10) &\approx P\left(Z \leq \frac{10 - 13.81}{\sqrt{11.903}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{10 - 13.81}{\sqrt{11.903}}\right) \\ &\approx 13.56\% \end{aligned}$$

Also von 100 werden erwartet, dass der Händler mehr als 13 wieder zurückgehen lässt.

Aufgabe 8

a)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|X \geq 1) &= \mathbb{E}(X) \\
\mathbb{E}(X|X \geq 2) &= \frac{1}{5}(2+3+4+5+6) = 4 \\
\mathbb{E}(X|X \geq 3) &= \frac{1}{4}(3+4+5+6) = 4.5 \\
\mathbb{E}(X|X \geq 4) &= \frac{1}{3}(4+5+6) = 5 \\
\mathbb{E}(X|X \geq 5) &= \frac{1}{2}(5+6) = 5.5 \\
\mathbb{E}(X|X \geq 6) &= 6
\end{aligned}$$

Aufgabe 9

a)

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &\approx 0.841 \\
\Phi(1.96) &\approx 0.975 \\
\Phi(-1.282) &\approx 0.1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\Phi(-0.5) &\approx 0.3085 \\
1 - \Phi(0.5) &\approx 0.3085 \\
1 - \Phi(-1.96) &\approx 0.975
\end{aligned}$$

c)

Hier gehen wir über die Normierung der Zufallsvariable (gesucht ist a)

$$\begin{aligned}
P(X \leq a) &= 0.67 \\
\Longleftrightarrow P\left(\frac{X-100}{15} \leq \frac{a-100}{15}\right) &= 0.67 \\
\Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) &= 0.67 \\
\Longleftrightarrow \frac{a-100}{15} &\approx 0.44 \\
\Longleftrightarrow a &\approx 106.59
\end{aligned}$$

Für die nächste Aufgabe auch einfach normen (gesucht ist wieder a):

$$\begin{aligned} P(X \leq 125) &= P\left(\frac{X-100}{15} \leq \frac{25}{15}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{25}{15}\right) \approx 0.9522 \end{aligned}$$

Bei der letzten führt uns normen zu:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{100}{15} \leq \frac{X-100}{15} \leq \frac{a-100}{15}\right) &\approx 0.4 \\ \iff \Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{100}{15}\right) &\approx 0.4 \\ \iff \Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) &\approx 0.4 + \Phi\left(-\frac{100}{15}\right) \\ \iff a &\approx 96.2 \end{aligned}$$

Unten sind einige schritte, aber man muss nur die Quantile an $0.4 + \Phi\left(-\frac{100}{15}\right)$ finden und dann nach a lösen.

Aufgabe 10

a)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx &= 1 \\ \iff \int_{10}^{16} \frac{1}{30} dx + \int_{16}^{18} C dx &= 1 \\ \iff \frac{6}{30} + 2C &= 1 \\ \iff \frac{1}{5} + 2C &= 1 \\ \iff 2C &= \frac{4}{5} \\ \iff C &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Für Y ist es gleich:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)dy = 1 \\
\iff &\int_0^2 f_Y(y)dy = 1 \\
\iff &\int_0^2 Dydy = 1 \\
\iff &\left[\frac{D}{2}y^2\right]_0^2 = 1 \\
\iff 2D = 1 \iff D = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(X)dx \\
&= \int_{10}^{16} x\frac{1}{30} + \int_{16}^{18} \frac{2}{5}xdx \\
&= \frac{1}{30}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{10}^{16} + \frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{16}^{18} = 16.2 \\
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3} \\
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \int_{10}^{16} \frac{1}{30}x^2dx + \int_{16}^{18} \frac{2}{5}x^2dx - 16.2^2 \\
&= \left[\frac{1}{30}\frac{1}{3}x^3\right]_{10}^{16} + \left[\frac{2}{5}\frac{1}{3}x^3\right]_{16}^{18} - 16.2^2 = 3.425 \\
Var(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2}y^3dy - \frac{16}{9} \\
&= \left[\frac{1}{2}\frac{1}{4}y^4\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11

a)

Wir können das Problem folgendermaßen definieren:

$$
\begin{aligned}
\text{Uhrzeit der Ankunft am Vormittag} &= X \sim U(11, 12) \\
\text{Uhrzeit der Ankunft am Nachmittag} &= Y \sim U(15, 16) \\
\text{Ankunft am Vormittag} &= Z \sim \text{Bernoulli}(0.2)
\end{aligned}
$$

Und somit ergibt sich der generelle Zufallsprozess:

$$\text{Ankunft von dem Mann} = B = XZ + Y(1-Z)$$

Also berechnen wir hier die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(B \leq 11,5) &= P(XZ + Y(1-Z) \leq 11) \\ &= P(XZ \leq 11) \\ &= P(Z=1)P(X \leq 11.5) \\ &= 0.2 \cdot 0.5 = 10\% \end{aligned}$$

b)

$$f_B(b) = \begin{cases} 0.2b & b \in [11, 12] \\ 0.8b & b \in [15, 16] \end{cases}$$