Autor: Carsten Stahl

Aufgabe 1

a)
da $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$ Ist die Ableitung:

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\ln(n)\right)\exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right) \to 0$$

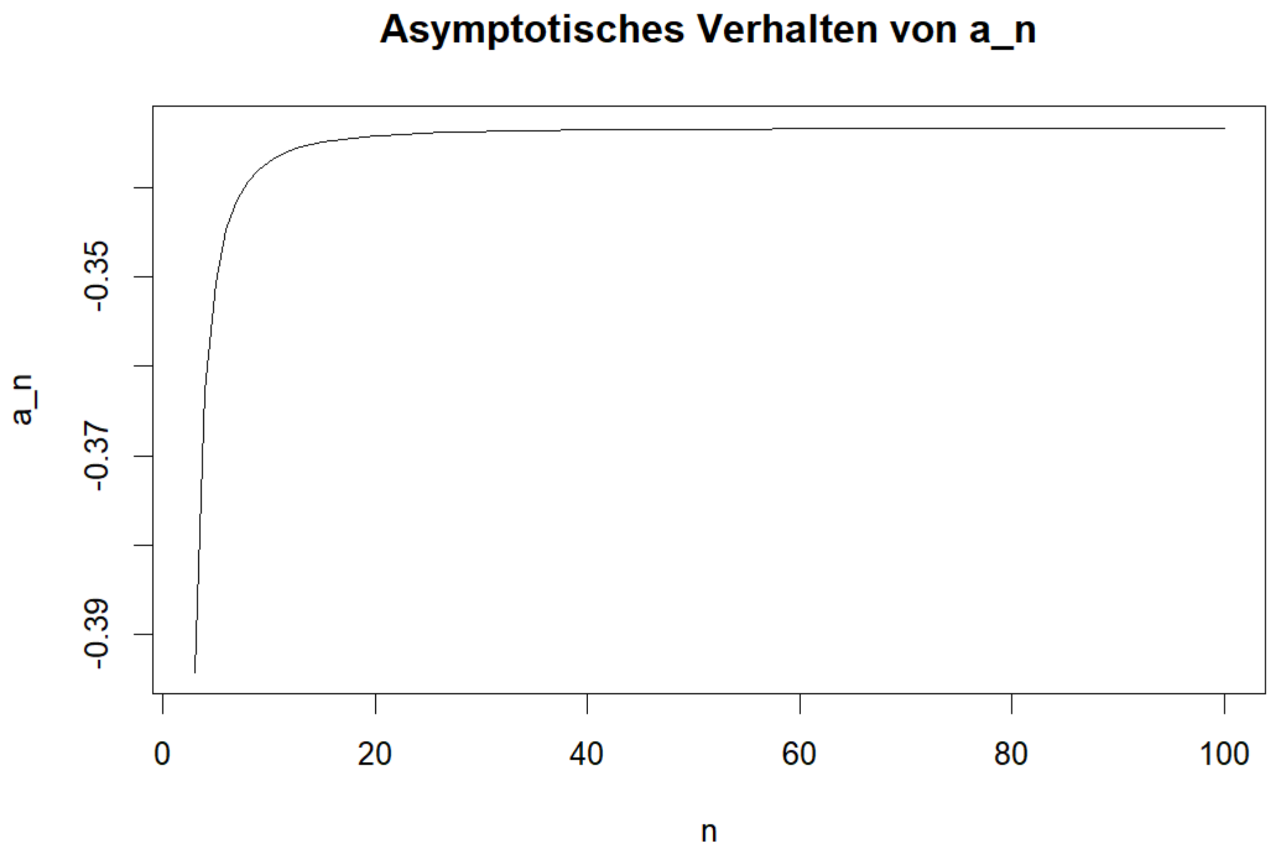
Weil (unter Benutzung von L' Hospital):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Dasselbe gilt für $\frac{1}{n^2}\ln n$ nur hier konvergiert die Folge schneller gegen 0.
Somit lässt sich sagen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{4n^2+\sqrt[n]{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{6n+2-1}{8n+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\ln n\right)\exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{8n+0} = \frac{6}{8}
\end{aligned}$$

b)



Die Werte scheinen zu $\frac{1}{3}$ zu konvergieren. Hier sind aber sehr komplizierte Ableitungen gefragt also reicht mir erstmal die folgende Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{3}$$

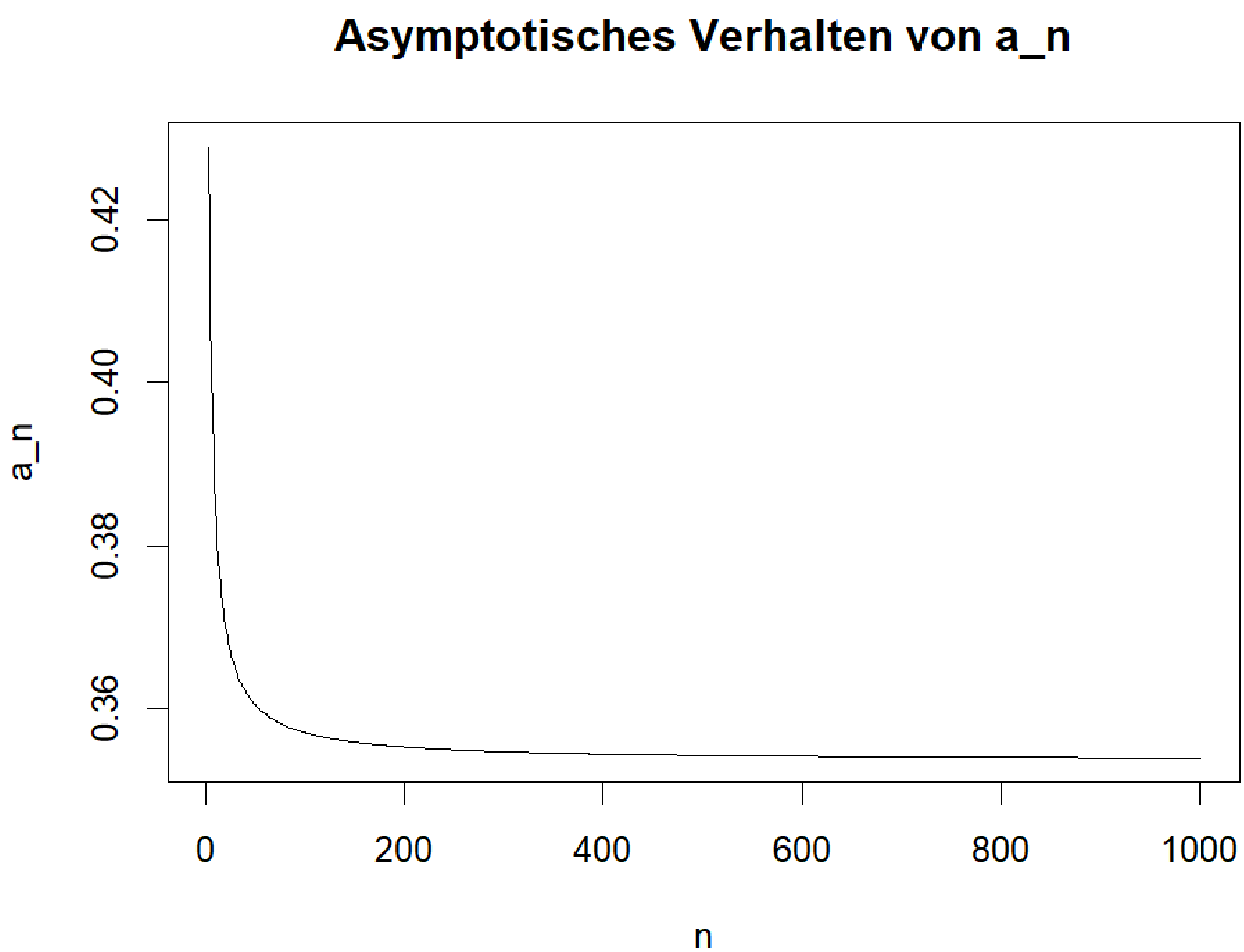
Mein Vorgänger schrieb dazu:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n + \sqrt[n]{7}}{\sqrt{n^6+3} - 4n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt[n]{7}}{n^3}\right)}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{3}{n^6}\right)} - 4n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt[n]{7}}{n^3}\right)}{n^3\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{n^6}\right)} - 4\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt[n]{7}}{n^3}}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{n^6}\right)} - 4} \\
&= \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+16} - 2n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{4n^2+16}-2n)(\sqrt{4n^2+16}+2n)}{\sqrt{4n^2+16}+2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+16-4n^2}{\sqrt{4n^2+16}+2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{16}{\sqrt{4n^2+16}+2n} = 0\end{aligned}$$

d)



$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^4+n^2-1} - \sqrt{2n^4+n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2n^4+n^2-1} - \sqrt{2n^4+n})(\sqrt{2n^4+n^2-1} + \sqrt{2n^4+n})}{\sqrt{2n^4+n^2-1} + \sqrt{2n^4+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^2-1-2n^4-n}{\sqrt{2n^4+n^2-1} - \sqrt{2n^4+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n-1}{\sqrt{2n^4+n^2-1} - \sqrt{2n^4+n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}} + \sqrt{2+\frac{1}{n^3}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}} + \sqrt{2+\frac{1}{n^3}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

e)

Hier wird L'Hospital verwendet:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}
$$

f)

Hier können wir den Kehrwert von der Folge berechnen:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+4}}{2^n+4} \\
&= 3 + \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+4}}{2^n+4}\right)^{-1}\right)^{-1} \\
&= 3 + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+4}{2^{n+4}}\right)^{-1} \\
&= 3 + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+4}} + \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2^{n+4}}\right)^{-1} \\
&= 3 + \left(\lim_{n\to\infty} 2^{-4} + 0\right)^{-1} \\
&= 3 + \left(2^{-4}\right)^{-1} \\
&= 3 + 2^4 = 3 + 16 = 19
\end{aligned}
$$

g)

Hier können wir den term erstmal in seine Bestandteile aufbrechen:

$$
a_n = -\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4} + 2(-2) + \frac{2}{n^2}
$$

Also:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= -\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} - \lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \\ &= 0 + 0 - 4 + 0 = 4\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{4n+12} - \sqrt{4n}) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(\frac{4n + 12 - 4n}{\sqrt{4n+12} + \sqrt{4n}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(\frac{12}{\sqrt{4n+12} + \sqrt{4n}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{n}}{\sqrt{4n+12} + \sqrt{4n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{4 + \frac{12}{n}} + \sqrt{4}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{12}{\sqrt{4 + \frac{12}{n}} + \sqrt{4}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{12}{2+2} = \frac{12}{4} = 3\end{aligned}$$

i)

$$a_n = \frac{n+1}{2n}$$

Hier auch wieder L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_n &= 2 \lim_{n\to\infty} 0.995^n \\ &= 2 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

b)

Wir müssen nach n folgende Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} h_n &= 0.1 \\ \iff 2 \cdot 0.995^n &= 0.1 \\ \iff 0.995^n &= 0.05 \\ \iff n &= \log_{0.995} 0.05 \\ \iff n &\approx 597.64 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\log(x^2\sqrt{x+4})$$

b)

$$\log\left(\frac{(x+2)^4}{(x-5)^3}\right)$$

Aufgabe 4

a)

$$\log x + 2\log(y)$$

b)

$$2\log x + \frac{1}{2}\log y - 5\log z$$

Aufgabe 5 a)

a)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}2x$$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\log(1+x^2) \\
\implies f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

c)

$$f'(x) = \frac{1}{\log x}\frac{1}{x} = \frac{1}{\log x^x}$$

d)

$$f(x) = 2\log x + \log\log x$$

Hier können wir das Ergebnis aus **c)** verwenden:

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{\log x^x}$$

e)

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\log\left(x^2-1\right) - \log(x^2+1)\right)$$

Diesen Term kann man jetzt viel einfacher ableiten:

$$f'(x) = \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1}$$

f)

$$f(x) = \frac{3}{5}\log(x)$$

Also:

$$f'(x) = \frac{3}{5x}$$

Aufgabe 5 b)

a)

$$f'(x) = 2\exp(2x+5)$$

b)

Kettenregel

$$f'(x) = 3\cos(3x)\exp(\sin(3x))$$

c)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

d)

Produktregel

$$f'(x) = -2\sin(2x)\exp(3x) + 3\cos(2x)\exp(3x)$$

e)

Auch wieder Produktregel:

$$f'(x) = 2x\exp(-x) - x^2\exp(-x)$$

f)

$$f(x) = 2\log x - x$$

Daraus ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1$$

Aufgabe 6

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2/3} \\ \implies f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-1/3} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+1)^{1/3} \\
\implies f'(x) &= \frac{2x}{3}(x^2+1)^{-2/3}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{2/3} \\
\implies f'(x) &= \frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{-2/3} \\
\implies f'(x) &= -\frac{2}{3}x^{-5/3}
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{-1} \\
\implies f'(x) &= -(x+1)^{-2}
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{-2} \\
\implies f'(x) &= -2(x+1)^{-3}
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{-1/2} \\
\implies f'(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (3x)^{1/5}(x-1)^{7/5} \\
\implies f'(x) &= \frac{3}{5}(3x)^{-4/5}(x-1)^{7/5} + \frac{7}{5}(3x)^{1/5}(x-1)^{2/5}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

a)

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(2x-1)^{-1} \\ \Longrightarrow f'(x) &= (2x-1)^{-1} - 2x(2x-1)^{-2} \end{aligned}$$

c)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} - \frac{1}{\sin(x)^2}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(4-x)^{-1/2} \\ \Longrightarrow f'(x) &= (4-x)^{-1/2} + \frac{x}{2}(4-x)^{-3/4} \end{aligned}$$

e)

$$f'(x) = \cos(\cos(\sin(x)))(-\sin(\sin(x)))\cos(x)$$

f)

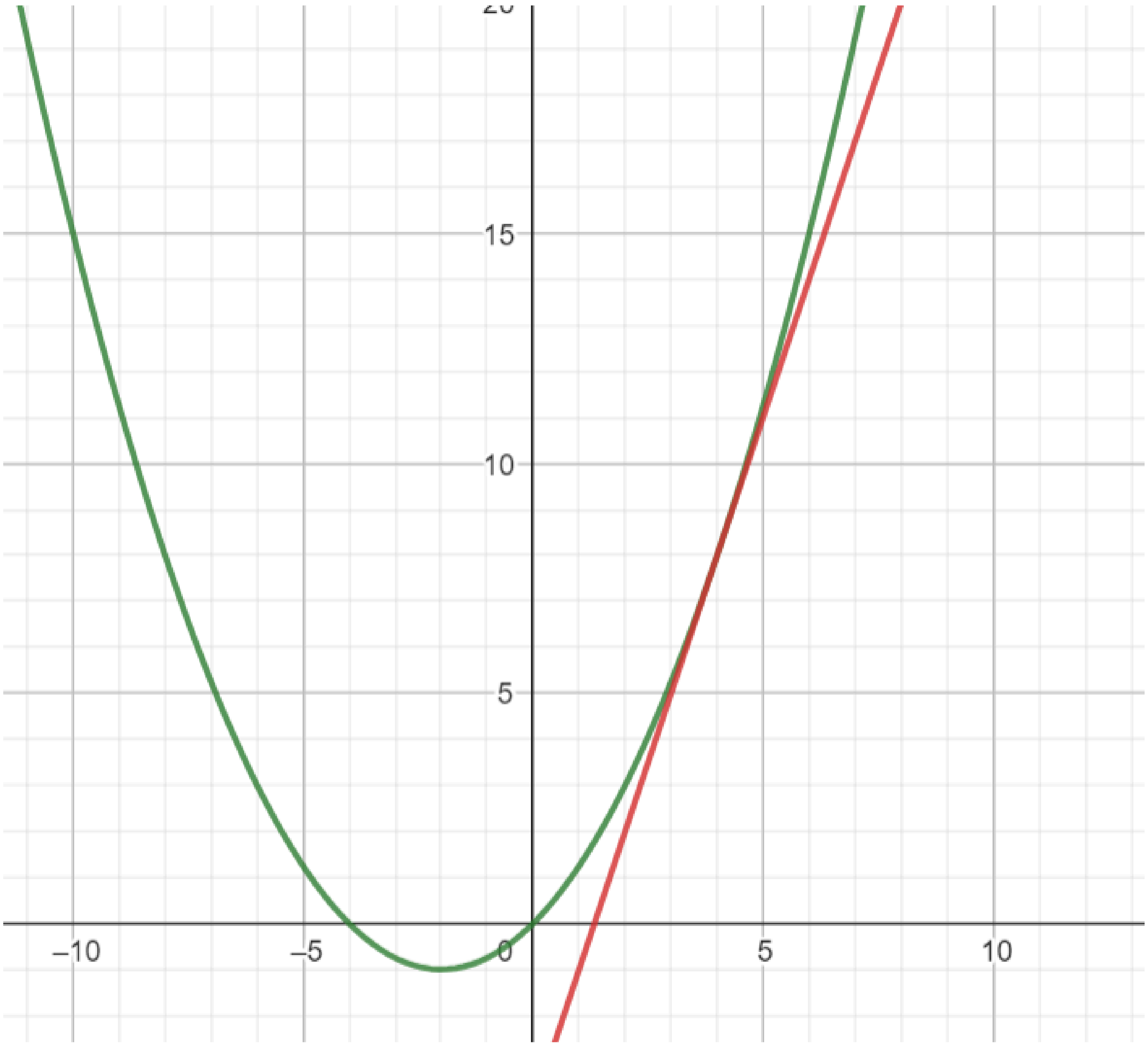
$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^2)^{-1/2}(x+\sqrt{1+x^2})^{-1} \\ \Longrightarrow f'(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}(x+\sqrt{1+x^2})^{-1} \\ &\quad - (x+\sqrt{1+x^2})^{-2}(1+x^2)^{-1/2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 8

a)

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

In Geogebra:



Die Tangente ist dann:

$$t(x) = f'(4)(x-4) + f(4)$$

b)

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= -1 \\
\iff 3x^2 - 12x + 8 &= -1 \\
\iff 3x^2 - 12x + 7 &= 0 \\
\iff x^2 - 4x + \frac{7}{3} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4 - \frac{7}{3}} \\
&= 2 \pm \sqrt{\frac{5}{7}}
\end{aligned}$$

Eines von den beiden muss:

$$y = -x = f'(x_{1,2})(x - x_{1,2}) + f(x_{1,2})$$

Lösen.

Aufgabe 9

BEO:

$$\begin{aligned} 2x^5 - 2ax &= 0 \\ (x^4 - a)2x &= 0 \\ x &= \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Das Optimierungsproblem ist:

$$\arg\max ab \quad 2a + 2b = 1$$

Also (unter Lagrange):

$$f(x, y) = xy + \lambda \left(x + y - \frac{1}{2} \right)$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} y + \lambda &= 0 \\ x + \lambda &= 0 \\ x + y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Heißt also das Quadrat hat die meiste Fläche.

Aufgabe 11

a)

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Und Hessematrix:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3\exp(xz) + 3xz\exp(xz) \\ 3y \\ 3x^2\exp(xz) \end{pmatrix}$$

Und Hesse (sieht kompliziert aus, ist aber nur Produktregel):

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z\exp(xz) + 3z\exp(xz) + 3xz^2\exp(xz) & 0 & 3x\exp(xz) + 3x\exp(xz) + 3x^2\exp(xz) \\ 0 & 3 & 0 \\ 6x\exp(xz) + 3x^2 z\exp(xz) & 0 & 3x^3\exp(xz) \end{pmatrix}$$

c)

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\cos(z) \\ 2xy\cos(z) \\ -xy^2\sin(z) \end{pmatrix}$$

Und die Hesse:

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y\cos(z) & -y^2\sin(z) \\ 2y\cos(z) & 2x\cos(z) & -2xy\sin(z) \\ -y^2\sin(z) & -2xy\sin(z) & xy^2\cos(z) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12

a)
BDO:

$$\begin{aligned} 4x^3 + 4xy^2 - 6x^2 - 2y^2 + 2x &= 0 \\ 3x^2y + 4y^3 - 4xy + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Nach x und y lösen, sprich:

$$\begin{aligned}
&\iff 3x^2 + 4y^2 - 4x + 2 = 0 \\
&\iff y = \sqrt{\frac{4x - 3x^2 - 2}{4}}
\end{aligned}$$

In die erste partielle Ableitung einsetzen und dann nach x auflösen. Dann wieder in die Gleichung mit y einsetzen. Dann bekommt man die Lösung

b)

BDO:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \\
\frac{9}{y^2} - 1 = 0
\end{aligned}$$

Daraus bekommen wir:

$$\begin{aligned}
x = \pm 1 \\
y = \pm 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 13 a)

a)

$$\begin{aligned}
\int_2^3 x^2 \log(x) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 \log(x)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 \log(x)\right]_2^3 - \frac{1}{3}\int_2^3 x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 \log(x)\right]_2^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3 \\
&\approx 5.928
\end{aligned}$$

b)

Lösen durch substitution:

$$z = 2x + 1 \implies \frac{dz}{dx} = 2 \iff dz = 2dx$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned}\int(2x+1)^3dx &= \frac{1}{2}\int z^3dz\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}z^4\right]_a^b\end{aligned}$$

Am Ende zurück-substituieren und lösen (da aber keine Intervallgrenzen gegeben sind, nicht möglich)

c)

Wieder partiell integrieren

$$\begin{aligned}u'(x) &= \exp(2x)\\ v(x) &= x\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\exp(2x)dx &= \int_0^1 v(x)u'(x)\\ &= [v(x)u(x)]_0^1 - \int_0^1 v'(x)u(x)\\ &= \left[x\frac{1}{2}\exp(2x)\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}\exp(2x)dx\\ &= \frac{1}{2}\exp(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\exp(2x)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\exp(2) - \frac{1}{4}\exp(2) = \frac{1}{4}\exp(2)\end{aligned}$$

d)

Standard computation time of wolfram alpha exceeded. Es ergab:

$$\int_2^3 \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{19}{217}\right)$$