Autor: Carsten Stahl

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} x &= (1, 2, \lambda)' \\ y &= (2, 3, 4)' \\ z &= (\lambda, 4, 5)' \end{aligned}$$

Unsere Taktik wird es sein, für lineare Abhängigkeit zu prüfen.

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \lambda \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

daraus ergeben sich die Bedingungen:

$$\begin{aligned} a &= 1.5 - 2b \\ 1.5 - 2b + b\lambda &= 2 \\ (\lambda - 2)b &= 0.5 \\ b &= \frac{1}{2\lambda - 4} \end{aligned}$$

Und für die letzte Zeile:

$$\begin{aligned} a\lambda + 5b &= 4 \\ 1.5\lambda - 2b\lambda + 5b &= 4 \\ 1.5\lambda + (5 - 2\lambda)b &= 4 \\ 1.5\lambda + \frac{5 - 2\lambda}{2\lambda - 4} &= 4 \\ 1.5\lambda(2\lambda - 4) + 5 - 2\lambda &= 4(2\lambda - 4) \\ 3\lambda^2 - 6\lambda + 5 - 2\lambda &= 8\lambda - 16 \\ 3\lambda^2 - 16\lambda + 21 &= 0 \end{aligned}$$

Gleichungssystem lösbar falls $\lambda \in \left\{2\frac{1}{3}, 3\right\}$.

Aufgabe 2

Sei $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit:

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} : a_{ij} = 0 \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

Wenn man nach dieser Null-Zeile entwickelt bekommt man:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} \cdot 0 \det(A_{ij}) \\ &= 0 \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} \det(A_{ij}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}1 &= x + y + 0z \\ 2 &= 0x + 0y + z \\ 3 &= x - y + 0z\end{aligned}$$

Und das ist das gleiche wie:

$$\begin{aligned}1 &= x + y \\ 2 &= z \\ 3 &= x - y\end{aligned}$$

Aus dem Gleichungssystem geht hervor, dass $z = 2$ und $x = 1 - y$ wenn wir das in die dritte Gleichung einsetzen, dann bekommen wir:

$$\begin{aligned}& 3 = 1 - y - y \\ \iff & 2 = -2y \\ \iff & y = -1\end{aligned}$$

Und dann einfach den Wert für y in x einsetzen:

$$x = 1 - y = 1 + 1 = 2$$

b)

$$\begin{aligned}1 &= 3x + y + 2z \\ 2 &= y - z \\ 3 &= x + y\end{aligned}$$

Wir wissen daraus, dass $y = 2 + z$ und somit (einsetzen in (3)):

$$\begin{aligned} & 3 = x + 2 + z \\ \iff & 1 = x + z \\ \iff & z = 1 - x \end{aligned}$$

Einsetzen von diesen beiden Ergebnissen in (1):

$$\begin{aligned} & 1 = 3x + 2 + 1 - x + 2(1 - x) \\ \iff & 1 = 2x + 3 + 2 - 2x \\ \iff & 1 = 5 \end{aligned}$$

Da diese Aussage widersprüchlich ist, wissen wir, dass es keine Lösung für dieses lineare Gleichungssystem gibt und a nicht als Linearkombination von den anderen Vektoren dargestellt werden kann.

c)

$$\begin{aligned} 1 &= 2x - z \\ 2 &= 4x - 2z \\ 3 &= y + z \end{aligned}$$

Effektiv haben wir mit diesem Gleichungssystem zwei Gleichungen, da sich die zweite Gleichung aus der ersten herleiten lässt. Es gibt also keine eindeutige Lösung. Wir bekommen aus der ersten Gleichung:

$$1 - 2x = z$$

Und aus der dritten:

$$\begin{aligned} & 3 = y + 1 - 2x \\ \iff & 2 = y - 2x \\ \iff & y = 2x - 2 \end{aligned}$$

Also alle Kombinationen mit diesen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} z &= 2x - 1 \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Erfüllen das Gleichungssystem und sind daher valide Linearkombinationen für die Darstellung von a.

Aufgabe 4

a)
Nein, weil:

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Gilt für alle $b \in \mathbb{R}$. Wir haben also eine Kombination gefunden ungleich 0, welche den Nullvektor ergibt.
b)
Ja, da wir hier keine Linearkombination finden, welche den Nullvektor ergibt.

$$\begin{aligned}0 &= x+3y\\0 &= 2x+4y\end{aligned}$$

Wir bekommen: $2y = x$ aber und:

$$0 = 2y+3y = 5y \implies y = 0$$

Und daher: $x = 2y = 0$. Also die einzige Linearkombination ist $(0, 0)$.
c)
Nein, Beweis durch Gegenbeispiel $\alpha = 2$ einsetzen und wir bekommen:

$$-2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Als valide Linearkombination.
c)
Nein, da jedes Skalar (ungleich Null) bereits einen eindimensionalen reelen Vektorraum indentifiziert. Über die Definition:

$$\begin{aligned}0 &= \sqrt{7}x+3\sqrt{5}y\\\implies x &= -\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}y\end{aligned}$$

Wir haben also eine Linearkombination ungleich Null gefunden, welche den Nullvektor ergibt.

Aufgabe 5

Sei die Position der Tischbeine indentifiziert durch drei Vektoren:

$$x, y, z \in \mathbb{R}^3$$

Wobei:

$$x = \begin{pmatrix} \text{Länge} \\ \text{x-Koordinate des Beines} \\ \text{y-Koordinate des Beines} \end{pmatrix}$$

Außerdem können wir annehmen, dass:

$$x \neq y$$
$$y \neq z$$
$$z \neq x$$

Also verschiedene Tischbeine. Und (damit der Tisch uns nicht zur Seite runterfällt, weil alle Tischbeine in einer Linie sind), dass mind. zwei von den Vektoren lin. unab. voneinander sind.

Die Frage ist nun, gibt es eine Ebene (und nur eine), welche x, y, z schneidet? Und die Antwort ist ja, es ist die Ebene, welche von $x - y, z - y$ aufgespannt wird.

Bei mehr als 3 Tischbeinen (oder mehr als 3 Vektoren) kann ich mehrere 3er paare finden, um eine Ebene aufzuspannen, daher wackelt der Tisch.

Aufgabe 7

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & -5 & -3 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Sowie:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 7 \\ -8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Dann ist die transponierte Matrix A' gegeben durch:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist:

$$A' + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Nach demselben Prinzip ist:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & -7 & 0 \\ 7 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Und:

$$A + B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & -5 & 2 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Die Martrizenprodukte sind:

$$AB = \begin{pmatrix} -8 & 10 & 9 \\ 2 & -15 & 7 \\ 2 & -17 & 21 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 0 \\ -5 & -15 & -1 \\ 24 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Die Determinanten sind:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = 1 \cdot 18 - 7 \cdot 12 = -66$$

Für die höher-dimensionalen Matrizen habe ich `R` benutzt. Aber man kann auch händisch Entwicklung nach einer Spalte vorgehen und diese Formel verwenden:

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Wobei man sich j (also die Spalte) frei aussuchen kann.
Hier die Ergebnisse:

$$\begin{aligned} 3) &= 24 \\ 4) &= 24 \\ 5) &= 40 \\ 6) &= -11 \end{aligned}$$

Aufgabe 9

Hier prüfen wir, ob die Determinante 0 ist. Wenn ja, ist die Matrix nicht invertierbar.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Dasselbe wieder elektronisch mit den anderen Matrizen:

$$2) = 40$$

Somit können wir die Matrix invertieren:

$$(\dots)^{-1} = \begin{pmatrix} -0.075 & 0.25 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die dritte matrix hatte eine Determinante von -2 (also invertierbar):

$$(\dots)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1.5 & -3 & 2.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Die vierte matrix war nicht invertierbar (det= 0).

Die Fünfte matrix hatte eine Determinante von -2 und eine Inverse von:

$$(\ldots)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$