technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić   Dr. Michele Serra

Synopse zur 9. Vorlesung – 12.09.2024

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Kapitel II – Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Geometrische Darstellung der Vektoraddition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$

[inserire immagini]

Entsprechendes gilt für Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Definition 3. (Euklidische Norm eines Vektors im $\mathbb{R}^n$)

Wir bezeichnen

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n v_j^2} \in [0, \infty)$$

als *Euklidische Norm (oder Länge)* des Vektros $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Damit haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \| \,.\, \|_2 \colon \mathbb{R}^n &\to [0, \infty) \\ \vec{v} &\mapsto \|\vec{v}\|_2 \end{aligned}$$

Falls keine Gefahr von Verwechslung besteht, lassen wir den Index 2 weg.

Definition 4. (Euklidische Abstand $\mathbb{R}^n$)

Für ein Paar $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den Euklidischen Abstand zwischen ihnen als:

$$d(\vec{v}, \vec{w}) := \|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_j - w_j)^2}$$

Dies ergibt eine Abbildung

$$\begin{aligned} d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to [0, \infty) \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto d(\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

Erinnerung Seien A eine Menge (z.B.: $A = \mathbb{N}$ oder $A = \mathbb{R}$ oder $A = \{\text{rot, grün, gelb, blau}\}$) und B ebenfalls eine Menge. Dann bezeichnen wir mit

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

das kartesische Produkt von A und B.
Diese zwei Abbildungen ($\|.\|$ und d) erfüllen jeweils eine Liste von Eigenschaften (oder Axiomen).

Aufgabe 4. reloaded (Voyager im 3-dim. Raum)

Wir haben N Messungen zu N Zeitpunkten von Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}(t_1, x_1, y_1, z_1) &= (t_1, \vec{v}_1)\\ (t_2, x_2, y_2, z_2) &= (t_2, \vec{v}_2)\\ &\vdots\\ (t_N, x_N, y_N, z_N) &= (t_N, \vec{v}_N)\end{aligned}$$

Ich suche eine Gerade $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ g(t) = \vec{b} \cdot t + \vec{c}$ (Geschwindigkeitsvektor $\vec{b}$ und Startpunkt $\vec{c}$), sodass der quadratische Fehler

$$Q(\vec{b}, \vec{v}) = \sum_{j=1}^{N} \|g(t_j) - \vec{v}_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \|\vec{b} \cdot t + \vec{c} - \vec{v}_j\|^2 = [b = (bx, by, bz), c = (cx, cy, cz)]$$

minimal ist. Damit haben wir eine Abbildung $Q\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6 \to [0, \infty)$ die minimiert werden soll:
suche Parameterwerte $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ sodass an dieser Stelle 6 erste Ableitungen verschwinden:

$$\begin{cases} 0 &= \frac{d}{db_x} Q(\vec{b}, \vec{c}) = 2 \sum_{j=1}^{N} (b_x t_j + c_x - x_j) t_j \\ 0 &= \frac{d}{db_y} Q(\vec{b}, \vec{c}) = 2 \sum_{j=1}^{N} (b_y t_j + c_y - y_j) t_j \\ 0 &= \frac{d}{db_z} Q(\vec{b}, \vec{c}) = 2 \sum_{j=1}^{N} (b_z t_j + c_z - z_j) t_j \end{cases} \tag{B}$$

$$\begin{cases} 0 &= \frac{d}{dc_x} Q(\vec{b}, \vec{c}) = 2 \sum_{j=1}^{N} (b_x t_j + c_x - x_j) \\ 0 &= \frac{d}{dc_y} Q(\vec{b}, \vec{c}) = 2 \sum_{j=1}^{N} (b_y t_j + c_y - y_j) \\ 0 &= \frac{d}{dc_z} Q(\vec{b}, \vec{c}) = 2 \sum_{j=1}^{N} (b_z t_j + c_z - z_j) \end{cases} \tag{C}$$

Ganz analog wie in Aufgabe 5. können wir die Gleichungen im Block (B) äquivalent umformen zu:

$$\begin{cases} 0 &= \frac{1}{N} \left(b_x \sum_{j=1}^{N} t_j^2 + c_x \sum_{j=1}^{N} t_j - \sum_{j=1}^{N} x_j t_j \right) = b_x \bar{k} + c_x \bar{t} - \bar{m}_x \\ 0 &= \frac{1}{N} \left(b_y \sum_{j=1}^{N} t_j^2 + c_y \sum_{j=1}^{N} t_j - \sum_{j=1}^{N} y_j t_j \right) = b_y \bar{k} + c_y \bar{t} - \bar{m}_y \\ 0 &= \frac{1}{N} \left(b_z \sum_{j=1}^{N} t_j^2 + c_z \sum_{j=1}^{N} t_j - \sum_{j=1}^{N} z_j t_j \right) = b_z \bar{k} + c_z \bar{t} - \bar{m}_z \end{cases}$$

sowie die im Block (C) zu

$$\begin{cases} 0 &= \frac{1}{N} b_x \sum_{j=1}^{N} t_j + c_x - \bar{x} = b_x \bar{t} + c_x - \bar{x} \\ 0 &= \frac{1}{N} b_y \sum_{j=1}^{N} t_j + c_y - \bar{y} = b_y \bar{t} + c_y - \bar{y} \\ 0 &= \frac{1}{N} b_z \sum_{j=1}^{N} t_j + c_z - \bar{z} = b_z \bar{t} + c_z - \bar{z} \end{cases}$$

Also wir haben ein lineares Gleichungssystem wie in der Schule mit 6 Gleichungen und 6 Variablen. Dies ist komplex zu lösen, aber wir haben Glück! Wir können jeweils die erste (bzw. zweite, dritte) Gleichungen von jedem Block koppeln, damit entkoppeln die 6 Gleichungen in 3 Gleichungssystem mit jeweils 2 Gleichungen. Die x-Komponenten b_x, c_x bestimme ich aus dem ersten Gleichungspaar und dabei ignoriere ich die andere 4 Gleichungen. Dann können wir ganz analog vorgehen wie in Aufgabe 5.

$$\begin{cases} 0 &= b_x\bar{k} + c_x\bar{t} - \bar{m}_x \\ 0 &= b_x\bar{t} + c_x - \bar{x} \end{cases}$$

Multipliziere die 2. Gleichung mit $\bar{t}$ und ziehe die 2. Gleichung aus der 1. ab

$$\begin{aligned} 0 = [(\bar{t})^2 - \bar{k}]b_x - \bar{m}_x + \bar{x}\bar{t} \Rightarrow b_x \\ &= \frac{\bar{x}\bar{t} - \bar{m}_x}{\bar{t}^2 - \bar{k}} \\ &= \frac{-\bar{x}\bar{t} + \bar{m}_x}{-\bar{t}^2 + \bar{k}} \\ &= \frac{\mathrm{Cov}((x_1, \ldots, x_N), (t_1, \ldots, t_N))}{\mathrm{Var}(t_1, \ldots, t_N)} \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(x, t)}{\mathrm{Var}(t)} \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung $0 = b_x\bar{t} + c_x - \bar{x}$ liefert

$$c_x = \bar{x} - b_x\bar{t} = \bar{x} - \bar{t} \cdot \frac{\mathrm{Cov}(x, t)}{\mathrm{Var}(t)}$$

Völlig analog bestimmt man auch

$$\begin{aligned} b_y &= \frac{\bar{m}_y - \bar{y}\bar{t}}{\bar{k} - \bar{t}^2} = \frac{\mathrm{Cov}(y, t)}{\mathrm{Var}(t)}, \qquad c_y = \bar{y} - b_y\bar{t} \\ b_z &= \frac{\bar{m}_z - \bar{z}\bar{t}}{\bar{k} - \bar{t}^2} = \frac{\mathrm{Cov}(z, t)}{\mathrm{Var}(t)}, \qquad c_z = \bar{z} - b_z\bar{t} \end{aligned}$$

Damit ist Aufgabe 4 gelöst und wir wissen, wie sich Voyager 1 bewegt.

Definition 5. (Abstrakte Norm)

Eine Abbildung $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennen wir Norm (auf $\mathbb{R}^n$), falls sie die folgende Bedingungen erfüllt

i) Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt $N(\vec{v}) \geq 0$;
ii) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt $N(\lambda\vec{v}) = |\lambda|N(\vec{v})$;
iii) Für zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$N(\vec{v} + \vec{w}) \leq N(\vec{v}) + N(\vec{w})$$

`d.h.: Umwege machen den Weg nicht kürzer.`

Manchmal werden wir $\| \, . \, \|$ für eine abstrakte Norm schreiben. In diesem Fall schreiben wir $\| \, . \, \|_2$, um die Euklidische Norm zu bezeichnen.

Definition 6. (Abstrakter Abstand oder Metrik im $\mathbb{R}^n$)

Eine Abbildung $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennen wir Abstand (auf $\mathbb{R}^n$), falls folgende Bedingungen für sämtliche Paare $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt sind:

i) $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$;

ii) $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$;

iii) Für jeden dritten Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w}).$$

Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir die Euklidische Abstand mit d_2 bezeichnen.