technische universität
dortmund

Vorkurs – VL 7

Terme und Gleichungen I

technische universität
dortmund

Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Vorkurs

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Laufende Fragensammlung

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlagen
2. Zahlenterme
3. Variablenterme
4. Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden
5. Mentale Bilder zu Gleichungen

Grundlagen

Elementare Algebra

„ist die Lehre vom **Rechnen mit allgemeinen Zahlen**, die zu ‚guten' Beschreibungen quantifizierbarer Zusammenhänge befähigt. Dafür haben sich Mathematisierungsmuster herausgebildet, die durch eine geeignete Fachsprache explizit gemacht werden können

(1) Mit **Variablen** werden **allgemeine, unbekannte und veränderliche Zahlen** dargestellt und handhabbar gemacht.
(2) Zahlen und Variable werden durch Operationen zu **Termen und Gleichungen als Denkeinheiten** verbunden und durch **verschiedene Begriffe von Gleichheit** in Zusammenhang gebracht.
(3) Durch die **symbolische Darstellung von Zahlen, Variablen und Zusammenhängen** wird ein kontextunabhängiger und regelgeleiteter Zeichengebrauch ermöglicht."

(Siebel 2005, S. 19)

Grundlagen

Terme vs. Gleichungen

Terme

- Anlässe zur Rechenhandlung
- Anlässe zur Erkundung arithmetischer Beziehungen

$$2 + 3$$

$$13 + (4 + 6)^2$$

Gleichung

- mathematischer Ausdruck
- beide Seiten des Gleichheitszeichens haben denselben Wert

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$2 + 3 = 5$$

$$(\mathrm{x} + 3^2) \cdot 7 = 56$$

Grundlagen

Vorgaben im Lehrplan

Gesamtschule Klasse 7/8

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundrechenarten: Multiplikation und Division von Brüchen
- Zahlbereichserweiterung: rationale Zahlen
- Term und Variable: Variable als Veränderliche, als Platzhalter sowie als Unbekannte, Termumformungen
- Gesetze und Regeln: Vorzeichenregeln, Rechengesetze für rationale Zahlen, **binomische Formeln**
- Lösungsverfahren: algebraische Lösungsverfahren linearer Gleichungen

Gesamtschule Klasse 9/10

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionsbegriff
- lineare Funktionen: Funktionsterm, Graph, Tabelle, Wortform, Achsenabschnitte, Steigung, Steigungsdreieck
- quadratische Funktionen: Term (Normalform, **Scheitelpunktform**), Graph, Tabelle, Scheitelpunkt, Symmetrie, Öffnung, Nullstellen und y-Achsenabschnitt, Transformation der Normalparabel (G-Kurs: keine Verschiebung entlang der x-Achse)
- Für G-Kurs: exponentielle Wachstumsprozesse
  exponentielle Funktionen: $f(x) = a \cdot q^x$, $a > 0, q > 0$, Term, Graph, Tabelle, Wortform, Wachstum (Anfangswert, Wachstumsfaktor und -rate, langfristige Entwicklung)

(Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen, 2022)

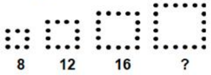
Grundlagen

Durchgängigkeit:
Langfristiges Lernen ermöglichen

Eine Reise durch die Jahrgänge

5

Variable
Allgemeine Zahl



6

Terme
Rechenausdruck

Variable
Allgemeine Zahl
Veränderliche
Unbekannte

Terme
Einsetzungsgleichheit

7

Terme
Beschreibungsgleichheit

Variable
Veränderliche

Funktion
Zuordnung, Kovariation

8

Variable
Unbekannte

Terme
Umformungsgleichheit

Gleichungen
aufstellen & lösen

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlagen
2. Zahlenterme
3. Variablenterme
4. Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden
5. Mentale Bilder zu Gleichungen

Zahlenterme

Bearbeiten Sie die folgende Schulbuchaufgabe!

5 Streichholz-Bilderfolgen

Bilder aus MW Wdhl-Baustein Rechte bei Cornelsen

a)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für die 3, 4 , ... Dreiecke?
- Schreibe erst Terme mit Zahlen auf.

Wie viele Dreiecke?	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wie viele Streichhölzer?									

Zahlenterme

Bearbeiten Sie die folgende Schulbuchaufgabe!

5 Streichholz-Bilderfolgen

Bilder aus MW Wdhl-Baustein Rechte bei Cornelsen

a)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für die 3, 4 , ... Dreiecke?
- Schreibe erst Terme mit Zahlen auf.

Wie viele Dreiecke?	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wie viele Streichhölzer?	$1\cdot2+1$	$2\cdot2+1$	$3\cdot2+1$	$4\cdot2+1$	$5\cdot2+1$	$6\cdot2+1$	$7\cdot2+1$	$8\cdot2+1$	$9\cdot2+1$

Zahlenterme

Definition:

Zahlenterme sind alle Zahlzeichen und syntaktisch korrekte Aneinanderreihungen solcher Zeichen mit Operationszeichen und Klammern.

Syntaktisch korrekt heißt: Zahlenterme können mit einer für sie zugelassenen Operation zu einem neuen Term verknüpft werden:

Beispiele für Terme:

12

$12 + 3$

$(12 + 3)\cdot(5 - 2)$

Gegenbeispiele:

$13 : 0$

$12 > 4$

$6 + 3 = 9$

$3 + : 2$

Gottwald, Kästner, Rudolph, 1995, S. 41

Zahlenterme

Terme können aus Teiltermen zusammengebaut werden:

Teilterm 1	Teilterm 2	Operation	Neuer Term
12	3	Addition	$12 + 3$
$12 + 3$	$5 – 2$	Multiplikation	$(12 + 3) \cdot (5 – 2)$

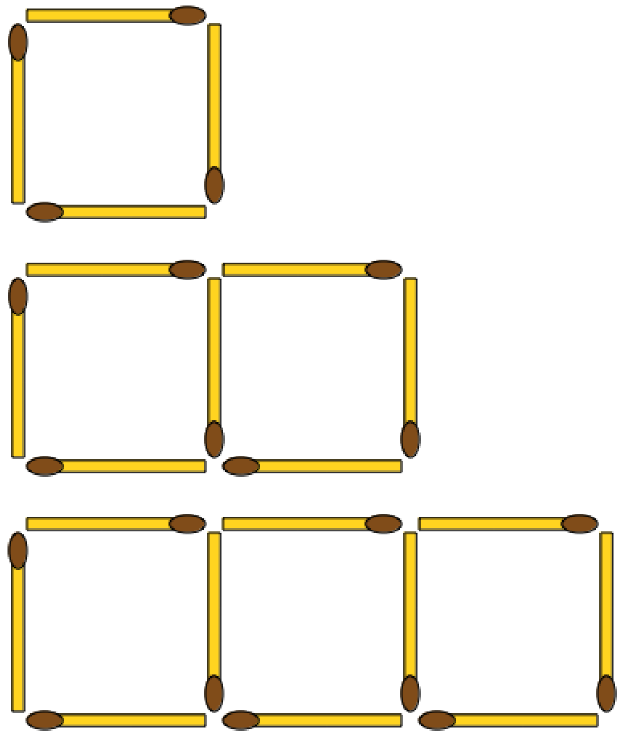
Die Reihenfolge der Teilterme ist wichtig, weil nicht alle Operationen kommutativ sind

Teilterm 1	Teilterm 2	Operation	Neuer Term
12	3	Subtraktion	$12 – 3$
3	12	Subtraktion	$3 – 12$
2	3	Potenzieren	2^3
3	2	Potenzieren	3^2

Terme dokumentieren Entwicklungen

Nina legt mit Streichhölzern eine Bilderfolge.

Sie zählt die Kästchen und die Streichhölzer, die sie braucht.



Anzahl der Kästchen	Benötigte Anzahl an Streichhölzern	Zahlenterm
1	4	1 + 1 · 3
2	7	1 + 2 · 3
3	10	1 + 3 · 3
4	13	1 + 4 · 3
5	16	1 + 5 · 3
…	…	…

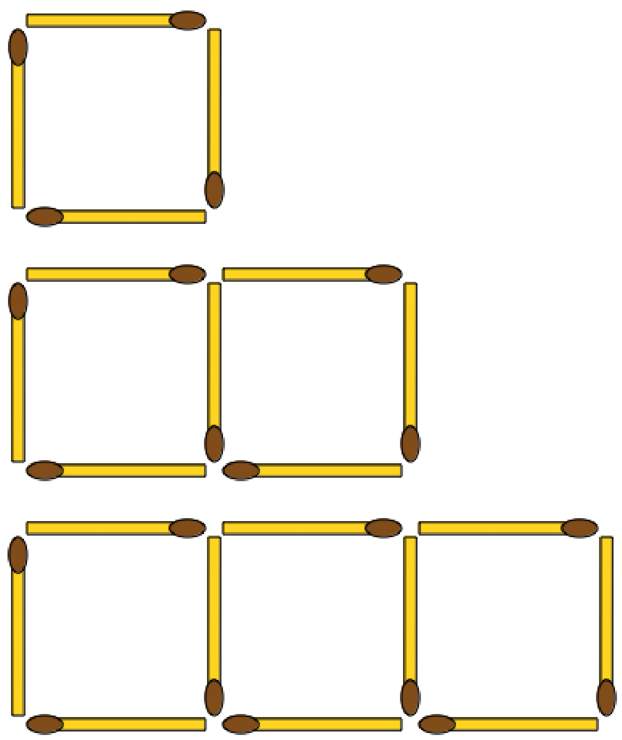
Vergleichen Sie die rechte Spalte mit der mittleren Spalte! Welchen Mehrwert hat die Spalte mit dem Zahlenterm?

(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Terme dokumentieren Entwicklungen

Nina legt mit Streichhölzern eine Bilderfolge.

Sie zählt die Kästchen und die Streichhölzer, die sie braucht.



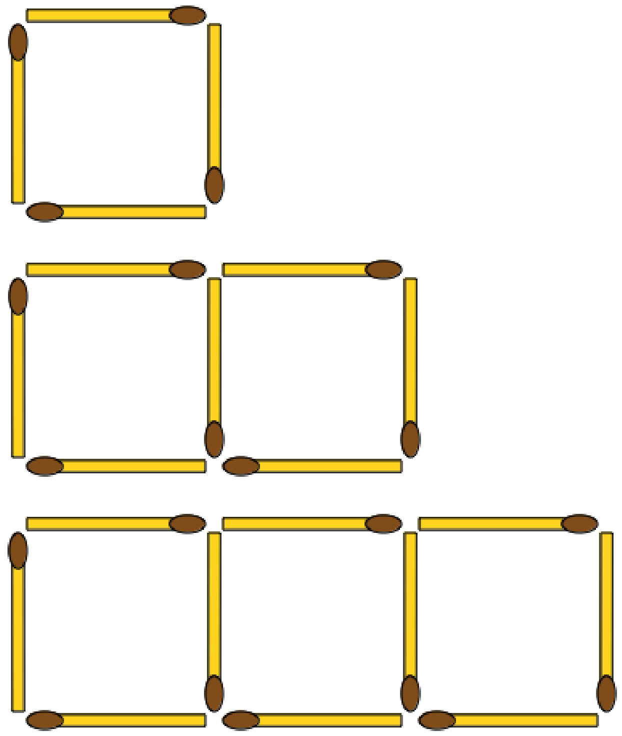
Anzahl der Kästchen	Benötigte Anzahl an Streichhölzern	Zahlenterm
1	4	$1 + 1 \cdot 3$
2	7	$1 + 2 \cdot 3$
3	10	$1 + 3 \cdot 3$
4	13	$1 + 4 \cdot 3$
5	16	$1 + 5 \cdot 3$
...	...	...
20	61	$1 + 20 \cdot 3$

(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Terme dokumentieren Entwicklungen

Nina legt mit Streichhölzern eine Bilderfolge.

Sie zählt die Kästchen und die Streichhölzer, die sie braucht.



Anzahl der Kästchen	Benötigte Anzahl an Streichhölzern	Zahlenterm
1	4	$1 + 1 \cdot 3$
2	7	$1 + 2 \cdot 3$
3	10	$1 + 3 \cdot 3$
4	13	$1 + 4 \cdot 3$
5	16	$1 + 5 \cdot 3$
…	…	…
20	61	$1 + 20 \cdot 3$
$\square$		$1 + \square \cdot 3$

(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Terme dokumentieren Entwicklungen

Nina legt mit Streichhölzern eine Bilderfolge.

Sie zählt die Kästchen und die Streichhölzer, die sie braucht.

Mit Hilfe eines neuen Zeichens, einer Variablen, kann die Entwicklung des Streichholzmusters kurz zusammengefasst werden.

Anzahl der Kästchen	**Benötigte Anzahl an Streichhölzern**	**Zahlenterm**
1	4	$1 + 1 \cdot 3$
2	7	$1 + 2 \cdot 3$
3	10	$1 + 3 \cdot 3$
4	13	$1 + 4 \cdot 3$
5	16	$1 + 5 \cdot 3$
...	...	...
20	61	$1 + 20 \cdot 3$
$\square$		$1 + \square \cdot 3$

(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Terme dokumentieren Entwicklungen

Nina legt mit Streichhölzern eine Bilderfolge.

Sie zählt die Kästchen und die Streichhölzer, die sie braucht.

Mit Hilfe eines neuen Zeichens, einer Variablen, kann die Entwicklung des Streichholzmusters kurz zusammengefasst werden.

Anzahl der Kästchen	**Benötigte Anzahl an Streichhölzern**	**Zahlenterm**
1	4	1 + 1 · 3
2	7	1 + 2 · 3
3	10	1 + 3 · 3
4	13	1 + 4 · 3
5	16	1 + 5 · 3
...	...	...
20	61	1 + 20 · 3
▯		1 + ▯ · 3

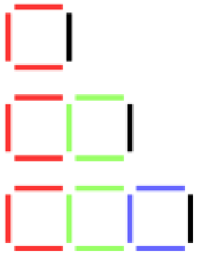
(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Terme dokumentieren Entwicklungen

Nina legt mit Streichhölzern eine Bilderfolge.

Sie zählt die Kästchen und die Streichhölzer, die sie braucht.

Für jedes Kästchen, das Nina legen möchte, benötigt sie drei Hölzer und eines, um das letzte Kästchen zu schließen.



Anzahl der Kästchen	**Benötigte Anzahl an Streichhölzern**	**Zahlenterm**
1	4	1 + 1 · 3
2	7	1 + 2 · 3
3	10	1 + 3 · 3
4	13	1 + 4 · 3
5	16	1 + 5 · 3
...	...	...
20	61	1 + 20 · 3
□		1 + □ · 3

Terme dokumentieren Entwicklungen

Generalisieren: Vom Zahlenterm zum Variablenterm

- Mithilfe von Variablen kann die gleiche Information wie mit einer Reihe von Zahlentermen transportiert werden.
- Gleichzeitig wird diese Information aber viel kürzer und übersichtlicher dargestellt.
- Der kurze Ausdruck 1 + n ∙ 3 mit der Variablen n beschreibt in zusammengefasster Form die gleiche Entwicklung.
- Variablen sind generalisierte Zahlen mit bestimmten Bedingungen, die vom Kontext abhängen.
- Diese Bedingungen werden über den Definitionsbereich dokumentiert.

Definitionsbereich für die Variable n: $n \in \mathbb{N}$

Anzahl der Kästchen	Benötigte Anzahl an Streichhölzern	Zahlenterm
1	4	1 + 1 ∙ 3
2	7	1 + 2 ∙ 3
3	10	1 + 3 ∙ 3
4	13	1 + 4 ∙ 3
5	16	1 + 5 ∙ 3
…	…	…
20	61	1 + 20 ∙ 3
n		1 + n ∙ 3

(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Terme dokumentieren Entwicklungen

Generalisieren: Vom Zahlenterm zum Variablenterm – Warum Zahlenterme?

- auch komplexere Situationen können nachvollzogen und mehrgliedrige, geschachtelte Terme können aufgestellt werden
- systematische Beziehung zwischen Termstruktur und Situation kann hergestellt werden
- Strategien zum Verstehen von Termstrukturen können entwickelt werden
- Zugänglichkeit auch für Schwächere (durch konkrete Situationen, bevor abstrakte, strukturgleiche Situationen folgen)

Definitionsbereich für die Variable n: $n \in \mathbb{N}$

Anzahl der Kästchen	Benötigte Anzahl an Streichhölzern	Zahlenterm
1	4	1 + 1 · 3
2	7	1 + 2 · 3
3	10	1 + 3 · 3
4	13	1 + 4 · 3
5	16	1 + 5 · 3
…	…	…
20	61	1 + 20 · 3
n		1 + n · 3

(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlagen
2. Zahlenterme
3. Variablenterme
4. Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden
5. Mentale Bilder zu Gleichungen

Variablenterme

Lösen Sie nun Teilaufgabe b)!

5 **Streichholz-Bilderfolgen**

Bilder aus MW Wdhl-Baustein Rechte bei Cornelsen

a)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für die 3, 4 , ... Dreiecke?
- Schreibe erst Terme mit Zahlen auf.

Wie viele Dreiecke?	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wie viele Streichhölzer?									

b)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für 42, ... x Dreiecke?
- Schreibe den Terme auf.

Wie viele Dreiecke?	1	2	3	4		15	16	42	x
Wie viele Streichhölzer?									

Variablenterme

Lösen Sie nun Teilaufgabe b)!

5 Streichholz-Bilderfolgen

Bilder aus MW Wdhl-Baustein Rechte bei Cornelsen

a)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für die 3, 4 , ... Dreiecke?
- Schreibe erst Terme mit Zahlen auf.

Wie viele Dreiecke?	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wie viele Streichhölzer?	$1\cdot2+1$	$2\cdot2+1$	$3\cdot2+1$	$4\cdot2+1$					

b)
- Wie viele Streichhölzer braucht man für 42, ... x Dreiecke?
- Schreibe den Terme auf.

Wie viele Dreiecke?	1	2	3	4		15	16	42	x
Wie viele Streichhölzer?						31	33	85	$x\cdot2+1$

Variablenterme

Definition:

Terme sind alle Zahlzeichen, Zahlenvariable und <u>syntaktisch korrekte</u> Aneinanderreihungen solcher Zeichen mit Operationszeichen und Klammern. Gottwald, Kästner, Rudolph, 1995, S. 41

Syntaktisch korrekt heißt, Terme können mit einer für sie zugelassenen Operation zu einem neuen Term verknüpft werden:

Beispiele für Terme:

12

x

$12 + x$

$(12 + x)\cdot(c - d)$

Gegenbeispiele:

$13 : 0$

$12 > 4$

$a + 3 = 9$

$3 + : a$

Keine syntaktisch korrekte Aneinanderreihung von Zeichen: Es darf nicht durch Null geteilt werden.

Ein *Ausdruck* zum Vergleichen ist kein Term. Es handelt sich dabei nicht um eine Operation.

Keine syntaktisch korrekte Aneinanderreihung von Zeichen: Weder der Additions- noch der Divisionsoperator verbindet zwei Terme.

Variablenterme

Definition:

Terme sind alle Zahlzeichen, Zahlenvariable und <u>syntaktisch korrekte</u> Aneinanderreihungen solcher Zeichen mit Operationszeichen und Klammern. Gottwald, Kästner, Rudolph, 1995, S. 41

Syntaktisch korrekt heißt, Terme können mit einer für sie zugelassenen Operation zu einem neuen Term verknüpft werden:

Teilterm 1	Teilterm 2	Operation	Neuer Term
12	x	Addition	12 + x
12 + x	c - d	Multiplikation	(12 + x) · (c - d)

Die Teilterme werden dabei im neuen Term zunächst in Klammern gesetzt. Wenn die Rechengesetze es zulassen, können die Klammern auch weggelassen werden.

Variablenterme

Terme können aus Teiltermen zusammengebaut werden:

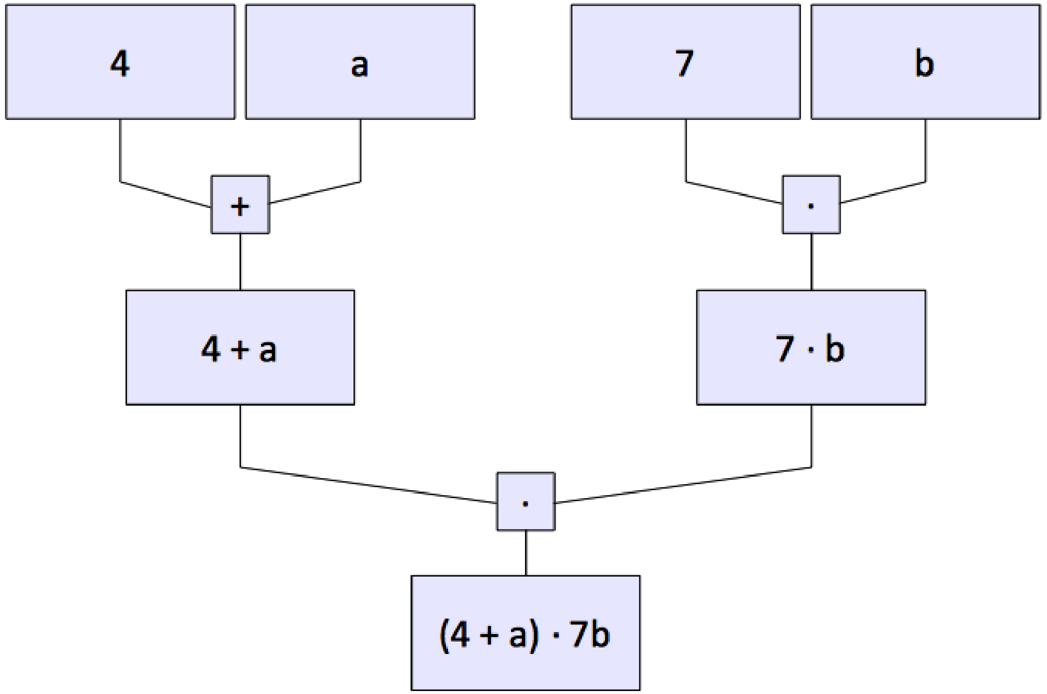
Teilterm 1	Teilterm 2	Operation	Neuer Term
12	x	Addition	$12 + x$
$12 + x$	$c - d$	Multiplikation	$(12 + x) \cdot (c - d)$

Die Reihenfolge der Teilterme ist wichtig, weil nicht alle Operationen kommutativ sind.

Teilterm 1	Teilterm 2	Operation	Neuer Term
12	x	Subtraktion	$12 - x$
x	12	Subtraktion	$x - 12$
2	x	Potenzieren	2^x
x	2	Potenzieren	x^2

Variablenterme

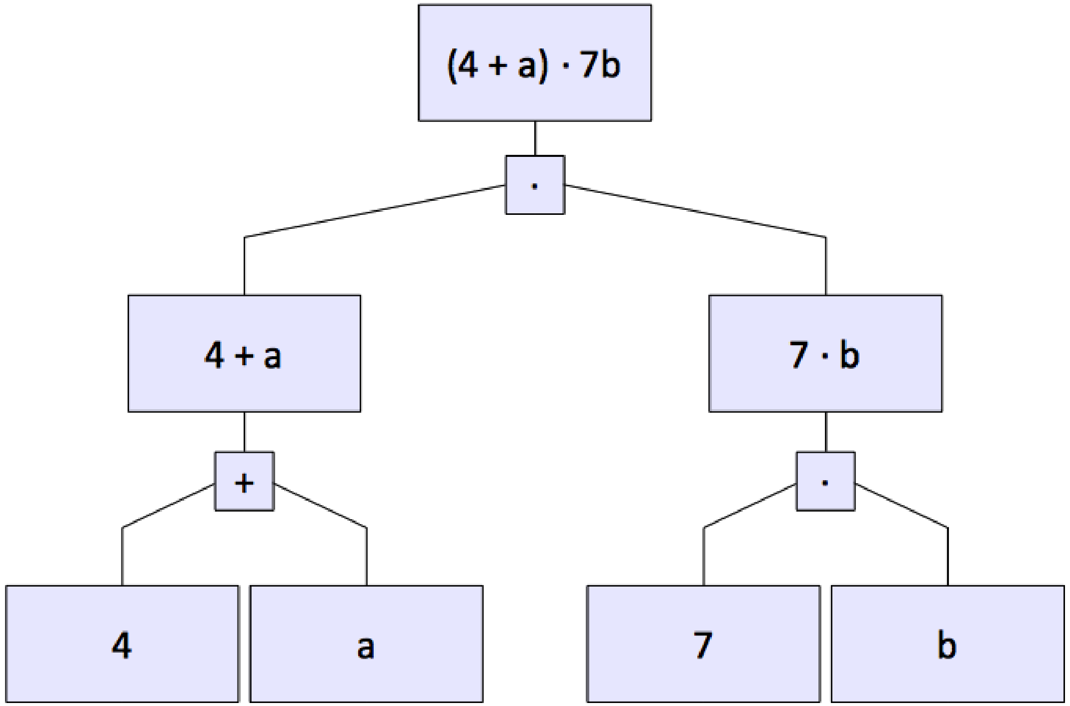
Das Prinzip zum Zusammenbau kann fortgesetzt angewendet werden und in einem Termbaum dargestellt werden:



(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Variablenterme

Umgekehrt kann man auf diese Weise Terme in Teilterme zerlegen:



Variablenterme

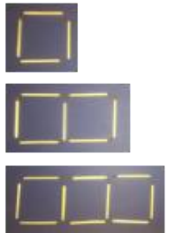
Andere Darstellungsweisen für Terme

Übliche Darstellungen für den Term $3n + 1$:

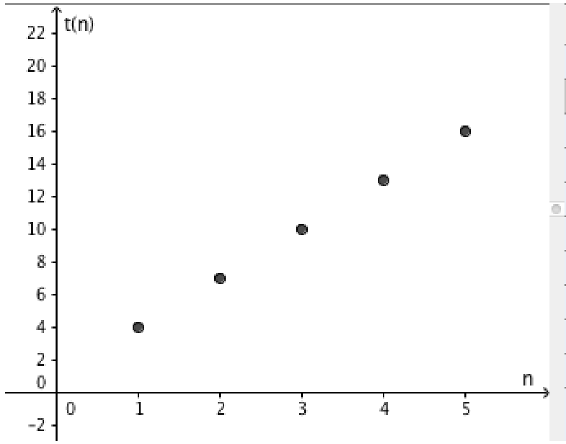
Mathematikerinnen und Mathematiker sagen, dass die hier im Graphen, in der Wertetabelle, im Muster, als Flächeninhalt und über die Beschreibung dargestellten Terme nicht gleich sind. Warum?

Muster

hier mit Streichhölzern



Graph

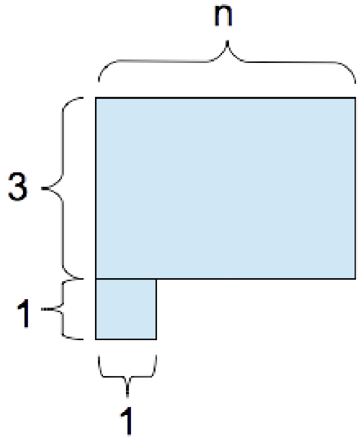


Wertetabelle

	A	B
1	n	t(n)
2	1	4
3	2	7
4	3	10
5	4	13
6	5	16
7		
8		
9		
10		

Darstellung als Fläche

insbesondere bei Multiplikationen



Beschreibung

„Zum Dreifachen einer Zahl wird 1 addiert.“

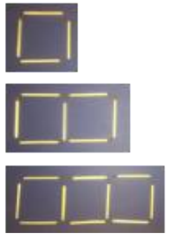
Variablenterme

Definitionsbereich eines Terms

- Der Definitionsbereich gibt an, welche Zahlen über die Variable zusammengefasst werden dürfen.
- Beispiele:
  - Muster (links): nur natürliche Zahlen
  - Flächeninhalt (rechts): alle reellen Zahlen, die größer sind als Null
- Achtung! Terme mit unterschiedlichem Definitionsbereich sind nicht gleich, auch wenn sie den gleichen strukturellen Aufbau haben!

Muster

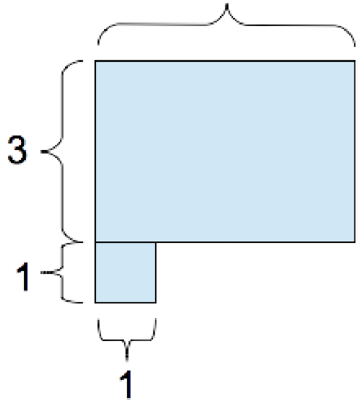
hier mit Streichhölzern



$n \in \mathbb{N}$

Darstellung als Fläche

insbesondere bei Multiplikationen



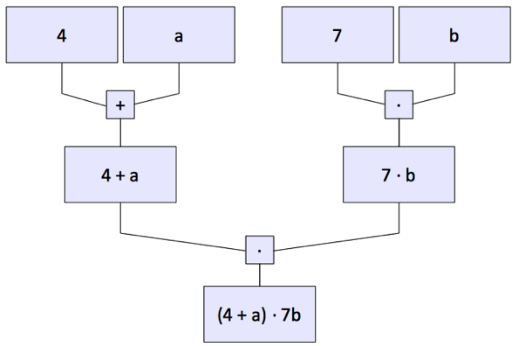
$n \in \mathbb{R}^+$

(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Variablenterme

Zusammenfassung

- Terme entstehen Schritt für Schritt aus zwei Teiltermen und einer Operation. Auch eine Zahl oder eine Variable stellt einen Term dar.
- Zahlenterme mit gleicher Struktur, die sich immer nur in einer Zahl unterscheiden, können zu einem Variablenterm zusammengefasst werden.
- Variablen sind generalisierte Zahlen mit bestimmten Bedingungen, die vom Kontext abhängen!
- Der Definitionsbereich gibt an, welche Zahlen mithilfe einer Variablen zusammengefasst worden sind.



		Term
1	4	$1 + 1 \cdot 3$
2	7	$1 + 2 \cdot 3$
3	10	$1 + 3 \cdot 3$
4	13	$1 + 4 \cdot 3$
5	16	$1 + 5 \cdot 3$
…	…	…
20	61	$1 + 20 \cdot 3$
n		$1 + n \cdot 3$

Definitionsbereich: $n \in \mathbb{N}$

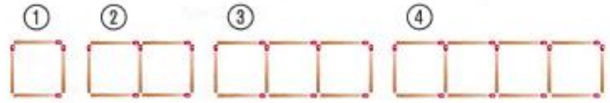
Variablenterme

Beispielaufgaben

Mit Termen Sachverhalte beschreiben

14 Mit Termen beschreiben, wie es weitergeht

a) Merve und Ole überlegen, wie viele Streichhölzer sie brauchen, um die Quadrate zu legen.
Erkläre, wie sie denken.



Ich zähle längs und quer.

Für drei Quadrate brauche ich 2 · 3 + 4 Hölzer.

Für vier Quadrate brauche ich 2 · 4 + 5 Hölzer.

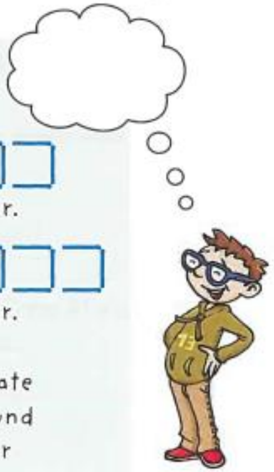
Für x-beliebig viele Quadrate brauche ich längs doppelt so viele Hölzer wie es Quadrate sind und quer ein Holz mehr als es Quadrate sind.
Für x Quadrate sind es 2 · x + (x + 1) Hölzer.

Ich nehme ein Startholz und lege dann an.

Für drei Quadrate brauche ich 1 + 3 · 3 Hölzer.

Für vier Quadrate brauche ich 1 + 4 · 3 Hölzer.

Für x-beliebig viele Quadrate brauche ich ein Startholz und dann soviel mal drei Hölzer wie es Quadrate sind.
Für x Quadrate sind es 1 + x · 3 Hölzer.



b) Beide haben Recht, aber verschiedene Terme. Woran liegt das?
Stimmt der Term auch für ein einziges Quadrat?

Tipp
„Eins weniger als es Quadrate sind" schreibt man mit dem Term x – 1.

c) Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Anzahl der notwendigen Streichhölzer zu zählen.
Denke dir verschiedene aus und schreibe als Term auf, wie du gezählt hast.

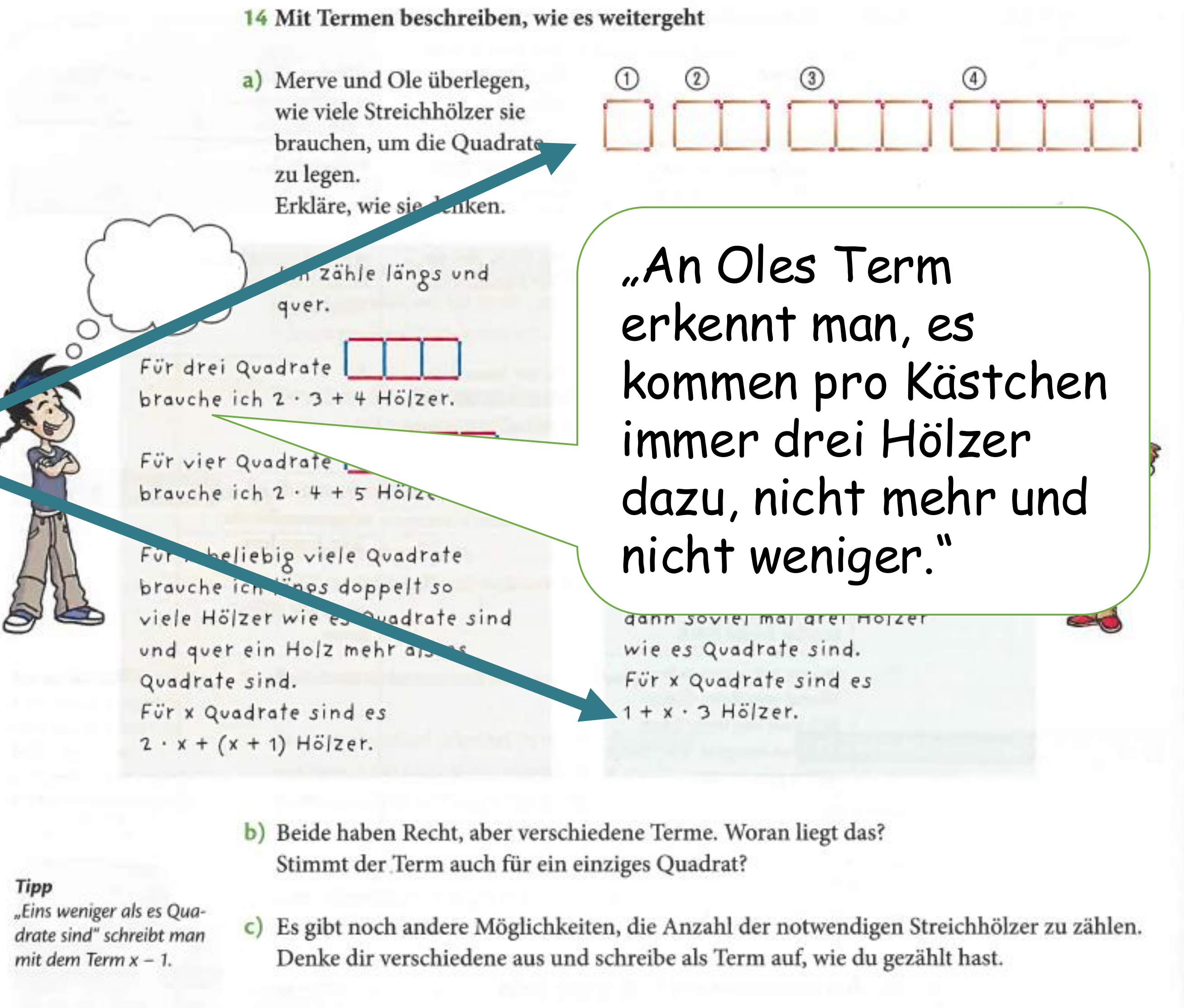
(*mathewerkstatt 7*, Seite 210)

Variablenterme

Beispielaufgaben

Mit Termen Sachverhalte beschreiben

Mit Termen Situationen erkunden


14 Mit Termen beschreiben, wie es weitergeht

a) Merve und Ole überlegen, wie viele Streichhölzer sie brauchen, um die Quadrate zu legen. Erkläre, wie sie denken.

① ② ③ ④

…h zähle längs und quer.

Für drei Quadrate brauche ich $2 \cdot 3 + 4$ Hölzer.

Für vier Quadrate brauche ich $2 \cdot 4 + 5$ Hölz…

Für beliebig viele Quadrate brauche ich längs doppelt so viele Hölzer wie es Quadrate sind und quer ein Holz mehr als es Quadrate sind. Für x Quadrate sind es $2 \cdot x + (x + 1)$ Hölzer.

… dann soviel mal drei Hölzer wie es Quadrate sind. Für x Quadrate sind es $1 + x \cdot 3$ Hölzer.

b) Beide haben Recht, aber verschiedene Terme. Woran liegt das? Stimmt der Term auch für ein einziges Quadrat?

Tipp
„Eins weniger als es Quadrate sind" schreibt man mit dem Term x – 1.

c) Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Anzahl der notwendigen Streichhölzer zu zählen. Denke dir verschiedene aus und schreibe als Term auf, wie du gezählt hast.

„An Oles Term erkennt man, es kommen pro Kästchen immer drei Hölzer dazu, nicht mehr und nicht weniger."

(*mathewerkstatt 7*, Seite 210)

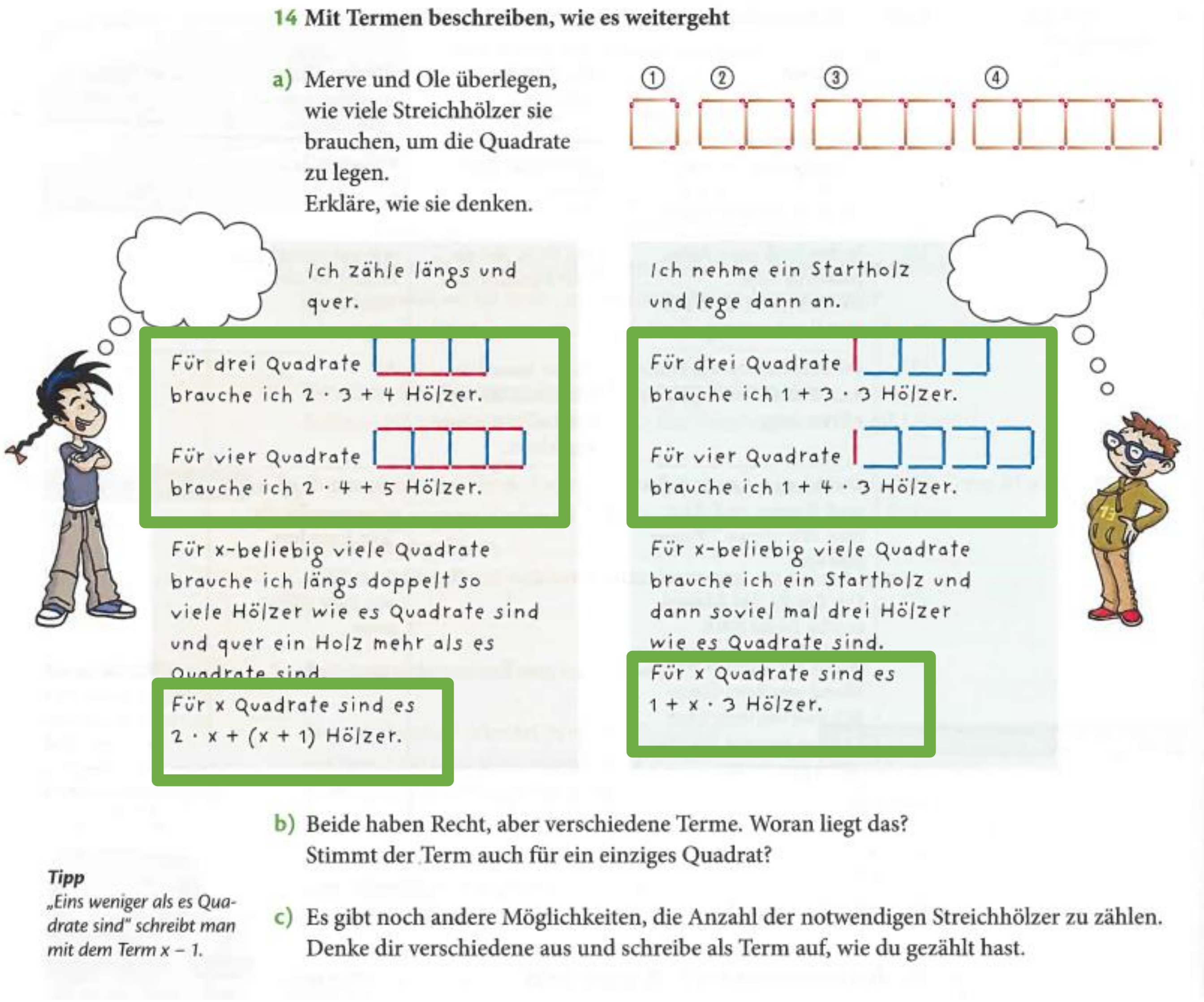
Variablenterme

Beispielaufgaben

Mit Termen Sachverhalte beschreiben

Mit Termen Situationen erkunden

Mit Termen kommunizieren



14 Mit Termen beschreiben, wie es weitergeht

a) Merve und Ole überlegen, wie viele Streichhölzer sie brauchen, um die Quadrate zu legen.
Erkläre, wie sie denken.

b) Beide haben Recht, aber verschiedene Terme. Woran liegt das?
Stimmt der Term auch für ein einziges Quadrat?

Tipp
„Eins weniger als es Quadrate sind" schreibt man mit dem Term x − 1.

c) Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Anzahl der notwendigen Streichhölzer zu zählen. Denke dir verschiedene aus und schreibe als Term auf, wie du gezählt hast.

Wie könnte jemand gedacht haben, der den Term $4 + 3\,(x-1)$ für die Anzahl der Hölzer aufschreibt?

(*mathewerkstatt 7*, Seite 210)

Variablenterme

Stellen Sie einen Term zu folgender Situation auf!
Füllen Sie dazu erst die Tabelle und formulieren Sie anschließend einen Variablenterm.

Immer mehr Tische, immer mehr Stühle

a) Die Özdemirs sind eine sehr gastfreundliche Familie. Egal, wie viel Freunde und Verwandte noch spontan vorbeikommen, immer stellen sie einfach noch Tische und Stühle dazu.
Im großen Garten geht das immer weiter.

- Wie viel Stühle braucht man für 3 Tische, für 4 Tische?
- Wie viel Stühle braucht man für 8 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?
- Wie viel Stühle braucht man für 42 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?

Anzahl der Tische	1	2	3	4	5	6	7	8	...	42
Anzahl der Stühle	6									

Variablenterme

Stellen Sie einen Term zu folgender Situation auf!
Füllen Sie dazu erst die Tabelle und formulieren Sie anschließend einen Variablenterm.

Immer mehr Tische, immer mehr Stühle

a) Die Özdemirs sind eine sehr gastfreundliche Familie. Egal, wie viel Freunde und Verwandte noch spontan vorbeikommen, immer stellen sie einfach noch Tische und Stühle dazu.
Im großen Garten geht das immer weiter.

1 Tisch, 6 Stühle — 2 Tische, 10 Stühle — 3 Tische, wie viele Stühle?

- Wie viel Stühle braucht man für 3 Tische, für 4 Tische?
- Wie viel Stühle braucht man für 8 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?
- Wie viel Stühle braucht man für 42 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?

Anzahl der Tische	1	2	3	4	5	6	7	8	...	42
Anzahl der Stühle	6	$2+2\cdot 4$			$2+5\cdot 4$					

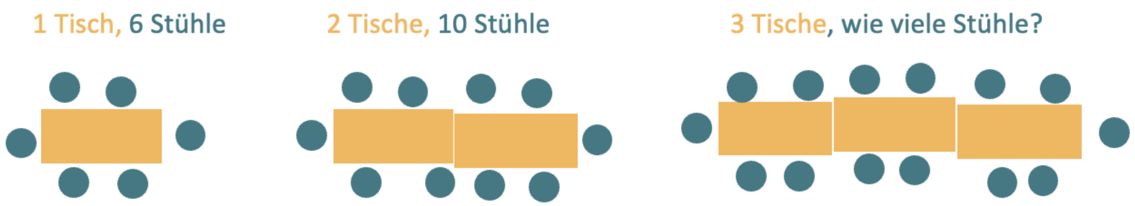
$2+x\cdot 4$

Variablenterme

Wofür steht nun das x im Term $2 + x \cdot 4$?

Immer mehr Tische, immer mehr Stühle

a) Die Özdemirs sind eine sehr gastfreundliche Familie. Egal, wie viel Freunde und Verwandte noch spontan vorbeikommen, immer stellen sie einfach noch Tische und Stühle dazu.
Im großen Garten geht das immer weiter.



- Wie viel Stühle braucht man für 3 Tische, für 4 Tische?
- Wie viel Stühle braucht man für 8 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?
- Wie viel Stühle braucht man für 42 Tische? Wie kannst du das ermitteln ohne Zeichnen?

Anzahl der Tische	1	2	3	4	5	6	7	8	...	42
Anzahl der Stühle	6	$2+2\cdot4$			$2+5\cdot4$					

$2+x\cdot4$

Variablenterme

Wofür steht nun das x im Term 2 + x · 4 ?

Immer mehr Tische, immer mehr Stühle

a) Die Özdemirs sind eine sehr gastfreundliche Familie. Egal, wie viel Freunde und Verwandte noch spontan vorbeikommen, immer stellen sie einfach noch Tische und Stühle dazu. Im großen Garten geht das immer weiter.

1 Tisch, 6 Stühle — 2 Tische, 10 Stühle — 3 Tische, wie viele Stühle?

x kann als Einsetzstelle gedeutet werden:

- „Für x kann man sich eine Tischanzahl ausdenken.“
- „Für x kann ich egal welche Tischanzahl nehmen.“
- „x steht für irgendeine Tischanzahl“

x kann als Veränderliche gedeutet werden:

- „x steht für jede Tischanzahl, die man in den Garten stellen kann“
- „x kann alle Zahlen sein, 3 oder 4 Tische oder 100 oder 1048, einfach alle, die man sich ausdenken kann“

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlagen
2. Zahlenterme
3. Variablenterme
4. Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden
5. Mentale Bilder zu Gleichungen

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Variablenaspekte nach Malle (1996)

Eine Variable ist Einsetzstelle für ein Objekt mit dem operiert wird.

Einsetzungsaspekt

Gegenstandsaspekt

Kalkülaspekt

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Was ist eigentlich eine Variable?

Variable als Platzhalter (**Einsetzungsaspekt**)	$2a + 3 = 13$	Die gesuchte Zahl a muss der Aussage entsprechen. Wenn ich 5 einsetze, stimmt die Aussage.

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Variablen in der Grundschule - Wertetabellen und Muster:

Erste Wertetabellen mit Hilfe von Operatoren

$\xrightarrow{\cdot 4}$	
1	
2	
3	

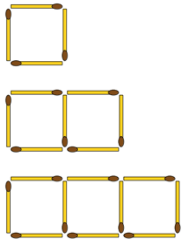
Jede Zahl wird nacheinander eingesetzt.

Vorbereitung: Einsetzungs-aspekt

Eine Zahlenfolge wird fortgesetzt.

Vorbereitung: Veränder-lichenaspekt

Erste Folgen mit Hilfe von Mustern



(Biehler, Lünne & Wiemann (2017), Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra“)

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Was ist eigentlich eine Variable?

Variable als Platzhalter (**Einsetzungsaspekt**)	$2a + 3 = 13$	Die gesuchte Zahl a muss der Aussage entsprechen. Wenn ich 5 einsetze, stimmt die Aussage.
Variable als unbekannte, zu bestimmende Zahl (**Gegenstandsaspekt: Unbekannte**)	$2a + 3 = 13$	Ich denke mir eine Zahl. Addiert man zum Doppelten der Zahl 3, so ergibt das 13. Bestimme die Zahl, für die die Aussage wahr ist.
Variable als allgemeine Zahl, mit der man umgehen kann (**Gegenstandsaspekt: Unbestimmte**)	$a \cdot b = A$	Diese Formel beschreibt den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.
Variable als Veränderliche, z.B. im Zusammenhang mit Funktionen (**Gegenstandsaspekt: Veränderliche**)	$2a + 3 = b$	Wie verändert sich b, wenn a größer wird?

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Variablen in der Grundschule - Umkehraufgaben mit Platzhaltern:

Variable als Platzhalter in Umkehraufgaben:

$$2 + \blacksquare = 5$$

Variable als Platzhalter in Operatordiagrammen:

$$\blacksquare \xrightarrow{:2} 6$$
$$4 \xrightarrow{\cdot \blacksquare} 36$$

Variable als Unbekannte

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

MaCo

Beantworten Sie die Multiple Choice Fragen.
In den Gleichungen wird jeweils der Gegenstandsaspekt deutlich.

Verwendungsweisen von Variablen

julistark18@googlemail.com Konto wechseln

Nicht freigegeben

* Gibt eine erforderliche Frage an

Luca kauft 6 Enten für insgesamt 12 €. Sie möchte herausfinden, wie teuer eine Ente ist und schreibt 6e = 12. *
Wofür steht das e in Lucys Gleichung?

- eine Ente
- Euro
- die Anzahl der Enten
- Enten
- die Kosten einer Ente

https://forms.gle/BYDXkBd8BC7Z4WBQ6

(Blomberg & Abshagen 2017, Malle 1993)

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Was ist eigentlich eine Variable?

Variable als Platzhalter (**Einsetzungsaspekt**)	$2a+3=13$	Die gesuchte Zahl a muss der Aussage entsprechen. Wenn ich 5 einsetze, stimmt die Aussage.
Variable als unbekannte, zu bestimmende Zahl (**Gegenstandsaspekt: Unbekannte**)	$2a+3=13$	Ich denke mir eine Zahl. Addiert man zum Doppelten der Zahl 3, so ergibt das 13. Bestimme die Zahl, für die die Aussage wahr ist.
Variable als allgemeine Zahl, mit der man umgehen kann (**Gegenstandsaspekt: Unbestimmte**)	$a \cdot b = A$	Diese Formel beschreibt den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b.
Variable als Veränderliche, z.B. im Zusammenhang mit Funktionen (**Gegenstandsaspekt: Veränderliche**)	$2a+3=b$	Wie verändert sich b, wenn a größer wird?
Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach bestimmten Regeln operiert wird (**Kalkülaspekt**)	$2a+3=13 \Leftrightarrow 2a=10 \Leftrightarrow a=5$	

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Variablenaspekte verändern das Denken beim Lösen von Gleichungen

Beispiel 1: Formel zur Berechnung des Mittelwertes $m = \frac{x+y}{2}$

- Beim Aufstellen der Formel denkt man vermutlich an nicht näher bestimmte Zahlen, betont also den Gegenstandsaspekt (Unbestimmte).
- Setzt man anschließend für x und y Zahlen ein, um verschiedene Mittelwerte auszurechnen, betont man den Einsetzungsaspekt.
- Formt man die Formel um, etwa zu $x = 2m - y$, verwendet man gewisse Regeln an und betont damit den Kalkülaspekt.
- Fragt man, wie sich m mit wachsendem y verändert, sieht man m und y unter dem Veränderlichenaspekt.

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Variablenaspekte verändern das Denken beim Lösen von Gleichungen

Beispiel 2: Rechengesetz $a + (b + c) = (a + b) + c$

- Das Gesetz gilt für drei allgemeine Zahlen -> Gegenstandsaspekt (Unbestimmte)
- Überprüft man das Gesetz durch fortlaufendes Einsetzen aller möglicher Zahlen, betont man den Einsetzungsaspekt.
- Nutzt man das Gesetz im Rahmen von Termumformungen, betont man damit den Kalkülaspekt.
- (Funktionale Betrachtung dieser Formel macht nicht viel Sinn, daher hier kein Veränderlichenaspekt.)

Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden

Zwischenfazit

- zwischen verschiedenen Perspektiven auf die Variablen sollten Lernende flexibel wechseln können
- alle drei Aspekte nötig, um ein tragfähiges Variablenverständnis aufzubauen
- meist nur Kalkülaspekt in Gleichungslehre dominant (unverzichtbar!)
- Begründungen liefert am besten der Gegenstandsaspekt

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Grundlagen
2. Zahlenterme
3. Variablenterme
4. Verwendungsweisen von Variablen unterscheiden
5. Mentale Bilder zu Gleichungen

Mentale Bilder zu Gleichungen

Gleiche Situationen mit unterschiedlichen Termen beschreiben

$3 \cdot (x + 4) \stackrel{?}{=} 3x + 12$

	3 (x + 4)	3x + 12
x = 1	$3 \cdot 5 = 15$	$3 + 12 = 15$
x = 3	$3 \cdot 7 = 21$	$9 + 12 = 21$

$3 \cdot (x + 4)$ (Ausmultiplizieren)
$= 3x + 12$

Beschreiben die Terme dasselbe Bild, dieselbe Situation?

Kommt beim **Einsetzen** aller Zahlen derselbe Wert heraus?

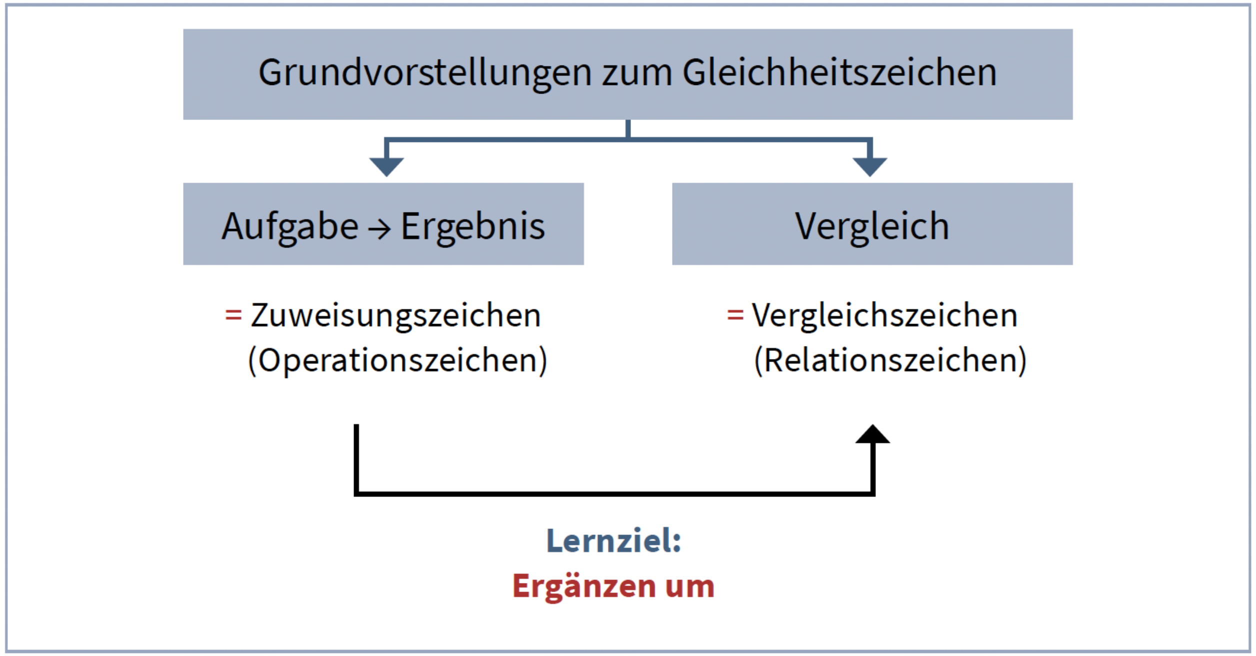
Kann man durch kalkülhafte **Umformungen** vom einen zum anderen kommen?

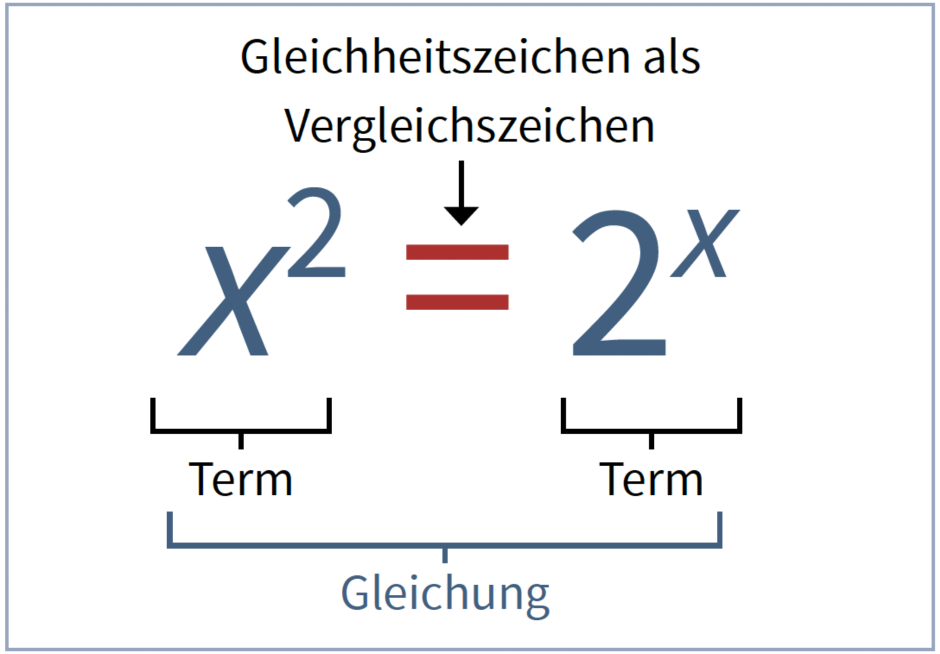
Inhaltliches Denken: zwei Grundvorstellungen → Kalkül

Mentale Bilder zu Gleichungen

Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

Mentale Bilder aufbauen





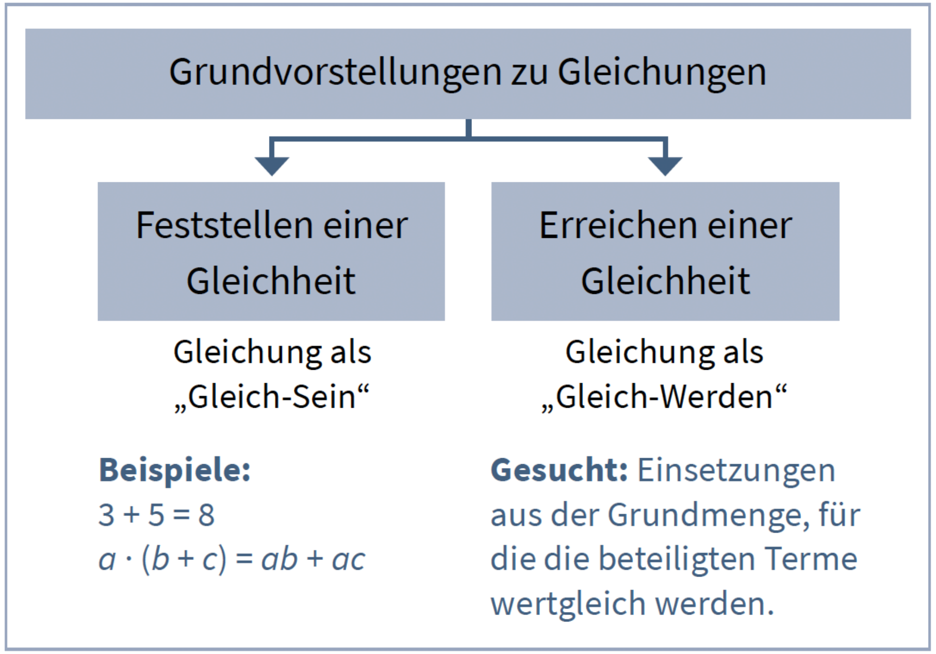
Mentale Bilder zu Gleichungen

Verstehensorientierung: Konzepte, Strategien und Verfahren grundlegen

Mentale Bilder aufbauen

Gleichheitszeichen als Vergleichszeichen

$$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\text{Term}} = \underbrace{2^x}_{\text{Term}}}_{\text{Gleichung}}$$



Voraussetzung für das Verständnis von Gleichungen sind bereits vorhandene mentale Bilder…
…zum Gleichheitszeichen
…zu Variablen
...zu Termen

Mentale Bilder zu Gleichungen

MaCo

Verschiedene Vorstellungen von Gleichheit und Gleichheitszeichen

1. Arithmetische Gleichheit (Aufforderung zum Rechnen)

   24 : 6 – 3 =

   = als Operationszeichen

2. Bestimmungsgleichungen (Gleichheit als Bedingung)

   Gesucht ist x mit $x^2 + x - 6 = 0$

   = als Relations/ Vergleichszeichen

3. Allgemeine Gleichungen

   1. Inhaltliche Gleichheit (Formeln in einem Sachzusammenhang)

      Volumenfomel für Kegel $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

      = als Relations/ Vergleichszeichen

   2. Formale Gleichheit (Beziehung gleichwertiger Terme)

      $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

      = als Relations/ Vergleichszeichen

   3. Definitorische Gleichheit

      Sei $y := 2x + 52$

      = als Setzungszeichen

Mentale Bilder zu Gleichungen

Im Schulbuch

Gleichungen und Ungleichungen

5 Zahlenrätsel. Wie heißt die Zahl?

a) Wenn ich meine Zahl mit 60 multipliziere, ist das Produkt kleiner als 400 und größer als 300.

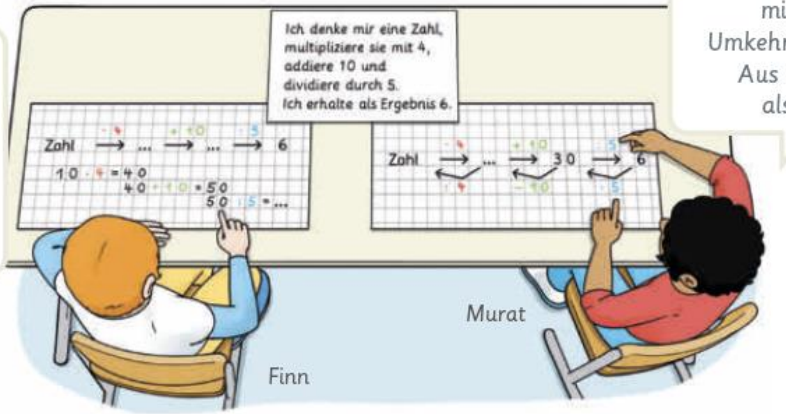
b) Wenn ich meine Zahl mit 50 multipliziere, ist das Ergebnis gleich dem Zehnfachen von 250.

c) Meine Zahl ist ein Vielfaches von 30 und von 50. Sie ist größer als 200 und kleiner als 400.

d) Findet weitere Zahlenrätsel.

6 Löst die Zahlenrätsel und erklärt.

Das ist die passende Rechenkette. Ich probiere. Wenn ich mit 10 starte, erhalte ich nicht 6 als das Ergebnis.



Ich rechne rückwärts mit den Umkehraufgaben. Aus : 5 wird also · 5.

a) Ich denke mir eine Zahl, multipliziere sie mit 5, addiere 30, dividiere durch 6 und erhalte die Zahl 10.

b) Wenn ich von meiner Zahl 50 subtrahiere, mit 9 multipliziere und 550 addiere, so erhalte ich 1 000.

c) Wenn ich von meiner Zahl 500 addiere, dann durch 3 dividiere und mit 5 multipliziere, so erhalte ich 2 500.

d) Findet weitere Zahlenrätsel.

Lösen Sie die Zahlenrätsel in Aufgabe 6.

Fragen? Vielen Dank!

Literatur

- Barzel, B., Glade, M. & Klinger, M. (2021). Algebra und Funktionen. Springer Spektrum.
- Blomberg, J. & Abshagen, M. (2017): Fit in Algebra? Mach den smart-Test! Mathe-Welt (202), Friedrich Verlag.
- Biehler,R., Lünne, S., & Wiemann, F. (2017). Projekt „Ffunt@OWL – Modul Algebra. Verfügbar unter: https://dzlm.de/angebote/angebotssuche%3Ff[0]%3Dfield_angebotstyp%253A432/einführung-von-variablentermen. Zuletzt abgerufen am: 14.05.2024
- Domokos, T., Dreher, A., Holzäpfel, L., Larrain, M., Weith, L., Barzel, B., Klingbeil, K., Rösken, F., Friesen, M (o. J.). Algebra – Eine Reise durch die Jahrgänge. Verfügbar unter: https://maco.dzlm.de/sites/maco/files/dzlm_mago_sek_algebra_220621.pdf
- Gottwald, S., Kästner, H., & Rudolph, H. (1995). Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik. *Mannheim, Meyers Lexikonverlag*.
- Korntreff, Stefan & Prediger, Susanne (2022). Zusammenhänge allgemein beschreiben mit Variablen und Termen. Sprachbildendes Unterrichtsmaterial für Klasse 7-10. Open Educational Resources, Verfügbar unter: sima.dzlm.de/um/8-002
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra mit vielen Beispielaufgaben*. Braunschweig: Vieweg.
- Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2022). Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gesamtschule/Sekundarschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Abgerufen von https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/311/gesk_m_klp_2022_06_17.pdf [16.08.2024].
- Roth, J., & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen –Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. Mathematik lehren, 236, 8-11.
- Roth, J. (2024). Didaktik der Algebra, Modul 5a/c. Verfügbar unter: https://www.juergen-roth.de/skripte/did_algebra/did_algebra_4_gleichungen.pdf. Zuletzt abgerufen am: 17.08.2024.

Internetlinks und Schulbücher

- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D., & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 4*. Ernst Klett Verlag.
- Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2014). *Mathewerkstatt 7, Schulbuch [...]* ([Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg.], 1. Aufl.). Cornelsen.