Vorkurs VL 6
Potenzen und Wurzeln

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Potenzen und Wurzeln
2. Binomische Formeln
3. Summen und Produkte

Laufende Fragensammlung

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Potenzen & Wurzeln im Lehrplan

Gesamtschule Klasse 7/8

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundrechenarten: Multiplikation und Division von Brüchen
- Zahlbereichserweiterung: rationale Zahlen
- Term und Variable: Variable als Veränderliche, als Platzhalter sowie als Unbekannte, Termumformungen
- Gesetze und Regeln: Vorzeichenregeln, Rechengesetze für rationale Zahlen, **binomische Formeln**
- Lösungsverfahren: algebraische Lösungsverfahren linearer Gleichungen

Gesamtschule Klasse 9/10

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Zahlbereichserweiterung: reelle Zahlen
- Begriffsbildung: Potenzen, Wurzeln
- Gesetze und Regeln: Potenzieren und Radizieren, **Potenzgesetze**
- Lösungsverfahren und Algorithmen:
  Für G-Kurs: Lösen rein quadratischer Gleichungen
  algorithmisches Näherungsverfahren, Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen (quadratische Ergänzung, p-q-Formel), algebraische und graphische Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen, Lösen von Exponentialgleichungen der Form $b^x = c$ durch systematisches Probieren

Abseits von den Wurzelgesetzen: Wo und wie nutzen Sie Potenzen und Wurzeln in der Mathematik?

Potenzen und Wurzeln

Definition *Potenzen*:

Für eine (reelle) Zahl *a* und eine natürliche Zahl *n* definiert man die *n*-te Potenz von a als $a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n mal}}$.
Dabei heißt *a* die Basis und *n* der Exponent.

Exponent

$$a^n$$

Basis

Bemerkung

Man kann Potenzen auch als Kurzschreibweise für Produkte aus gleichen Faktoren ansehen. Der Faktor wird dabei als Basis geschrieben und die Anzahl gleicher Faktoren in den Exponenten eingetragen.

Potenzen und Wurzeln

Potenzgesetze

Für positive reelle Zahlen a, b und ganze Zahlen m, n gilt:

(P1a) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(P1b) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

(P2a) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(P2b) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(P3) $(a^n)^m = a^{nm}$

Spezialfälle

1. Für alle reellen Zahlen a gilt: $a^0 := 1$
2. Für eine negative Zahl $-n$ gilt: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $a \neq 0$.

Potenzen und Wurzeln

- Im Schulbuch

So vereinfacht man Potenzen mit verschiedenen Basen

$7^5 \cdot 3^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) =$ ______

allgemein: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$7^5 \cdot 3^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 3) \cdot 7^{\square} =$ ______

Bei der Summe von Potenzen gibt es keine einfache Regel was mit dem Exponenten passiert:
$7^{10} + 7^8$: Das könnte man beispielsweise so umformen: $7^8 \cdot 7 \cdot 7 + 7^8 \cdot 1 = 7^8 \cdot (7 \cdot 7 + 1) = 7^8 \cdot 50$
$7^5 + 8^5$: Es gibt für $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ keine Vereinfachung.

Potenzen mit Variablen

$a^2 \cdot a^5$ (denken: $a \cdot a \quad \cdot \quad a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$) = ______

$a^2 \cdot a^{-5}$ (denken: $\frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$) = ______

$x^2 \cdot y^3 \cdot x^5 \cdot y^4$ (denken: $x \cdot x \quad \cdot \quad y \cdot y \cdot y \quad \cdot \quad x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \quad \cdot \quad y \cdot y \cdot y \cdot y$) = ______

MB 10 | Wissensspeicher – Rechnen mit Potenzen | Zahlen 5

Wissensspeicher Rechnen mit Potenzen

So heißen die Teile einer Potenz

$5^3 = 125$

Zahl und Maß

allgemein: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

allgemein: $a^n : a^m = a^{n-m}$

zu O4/O5/O6, S. 33, Kapitel „Von den

Kurzes Eindenken ins Vereinfachen von Termen: Bearbeiten Sie die beiden Aufgaben links.

Potenzen und Wurzeln – auch bei der Zinsrechnung relevant?

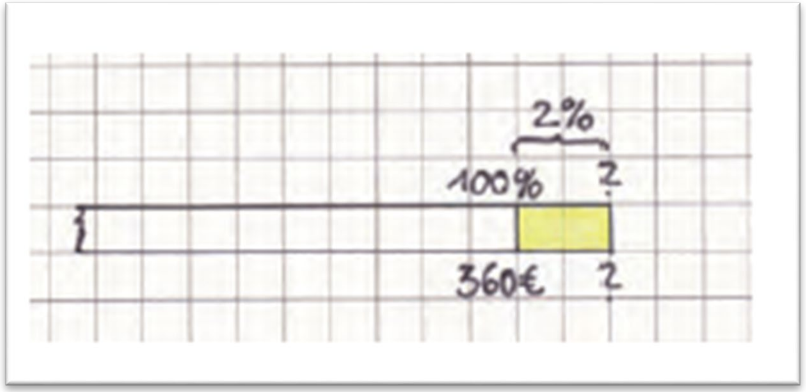
Ein Kapital von 63000 € wird 6 Jahre lang mit einem festen Zinssatz von 5,3 % verzinst.

Die Zinsen werden mitverzinst. Berechnen Sie das Kapital am Ende des sechsten Jahres.

Zinsrechnung verstehen

Wiederholung aus VL 5

Prozentstreifen



Pfeilbild

Start		Nach einem Jahr
360	$\cdot 1{,}02$ →	

Minitabelle

Anteil	Wert
1%	
2%	
100%	360€
102%	

b

Zinssatz
Zinsfaktor
Grundwert
Tilgung
Restschuld

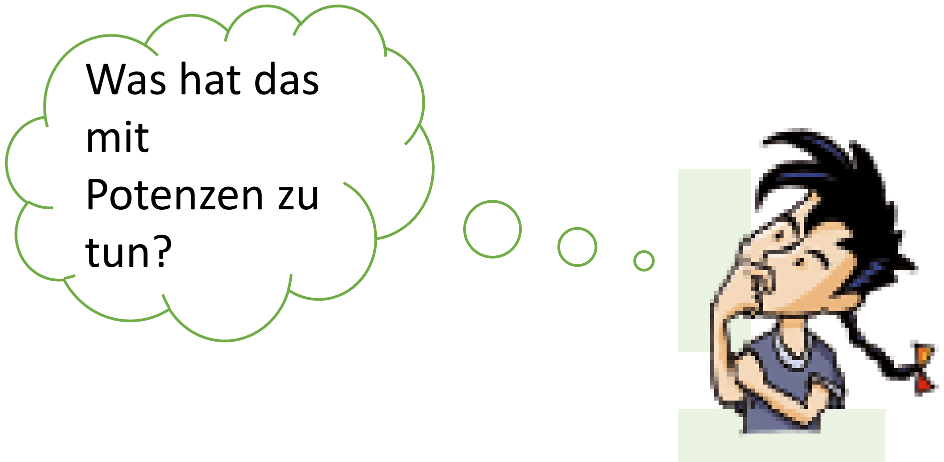
Potenzen und Wurzeln

Ein Kapital von 6300 € wird 6 Jahre lang mit einem festen Zinssatz von 5,3 % verzinst.

Die Zinsen werden mitverzinst. Berechne das Kapital am Ende des sechsten Jahres.

Start		Nach einem Jahr		Nach zwei Jahren		Nach drei Jahren	
6300	$\cdot 1{,}053 \rightarrow$	6633,90	$\cdot 1{,}053 \rightarrow$	6985,50	$\cdot 1{,}053 \rightarrow$	7355,73	$\cdot 1{,}053 \rightarrow$

Nach vier Jahren		Nach fünf Jahren		Nach sechs Jahren
7745,58	$\cdot 1{,}053 \rightarrow$	8156,10	$\cdot 1{,}053 \rightarrow$	8588,37



Potenzen und Wurzeln

Ein Kapital von 63000 € wird 6 Jahre lang mit einem festen Zinssatz von 5,3 % verzinst. Die Zinsen werden mitverzinst. Berechne das Kapital am Ende des sechsten Jahres.

6 mal mit dem gleichen Faktor multipliziert → das kann man eleganter lösen

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$q = 1 + p/100$

Also: $K_6 = 6300 \cdot (1+0{,}053)^6$

$<=> K_6 = 6300 \cdot 1{,}36$

$<=> 8588{,}37$

Nach sechs Jahren

8588,37

Was sind K_n, K_0 und q^n ?

Was hat das mit Potenzen zu tun?

Potenzen und Wurzeln

Ein Quadrat mit einer Fläche von $100cm^2$ soll verdreifacht werden. Wie lang ist die neue Seitenlänge?

Überlegen Sie zunächst selbst: wie würden Sie vorgehen?
Schauen Sie sich dann noch einmal die Lösungen von Pia, Merve und Ole an. Wie gehen die drei vor und was stimmt?

▸ Materialblock S. 50
Basisaufgabe

9 Dreifache Fläche – dreifache Seitenlänge?

Pia, Merve und Ole wollen ein Quadrat mit $100\,cm^2$ verdreifachen und die neue Seitenlänge bestimmen. Aber nicht alle rechnen richtig.

Ich rechne so:
Die dreifache Fläche hat die dreifache Seitenlänge.

$\sqrt{3\cdot 100}=3\cdot\sqrt{100}=3\cdot 10$

Es wird ja nur die Fläche verdreifacht und nicht die Seitenlänge. Beim Verdoppeln der Fläche war die Seite ja auch nicht doppelt. Ich rechne so:

Ich setze die Fläche dreimal nebeneinander und rechne so:

$\sqrt{100+100+100}$
$=\sqrt{100}+\sqrt{100}+\sqrt{100}=10+10+10$

Seitenlänge des Quadrats in cm	Flächeninhalt des Quadrats in cm²
10	100
	$\xrightarrow{\cdot 3}$ 300
	400

$\sqrt{3\cdot 100}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{100}=10\cdot\sqrt{3}$

(MW 9, S. 98)

Potenzen und Wurzeln

Definition *Wurzel*:

Die *n*-te Wurzel aus der nichtnegativen Zahl *a* ist diejenige nichtnegative Zahl, die potenziert mit *n* wieder die Zahl *a* ergibt.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[n]{a} \qquad | \text{ potenzieren mit } n \\ \Leftrightarrow x^n &= a \end{aligned}$$

Die Zahl *n* heißt der Wurzelexponent. *a* nennt man den Radikand.

$$\underbrace{x}_{\text{Wurzel(wert)}} = \sqrt[\overset{\text{Wurzelexponent}}{n}]{\underbrace{a}_{\text{Radikand}}} = a^{\frac{1}{n}}$$

Potenzen und Wurzeln

Übung aus dem Schulbuch

Regel, die geprüft werden soll	Beispiel mit Zahlen	Wert des Terms links	Wert des Terms rechts	Stimmt die Regel für alle positiven Zahlen? nein	vielleicht
$\sqrt{a \cdot b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{16 \cdot 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$	$\sqrt{16 \cdot 9} =$	$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} =$		
$\sqrt{a : b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} : \sqrt{b}$	$\sqrt{16 : 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} : \sqrt{9}$				
$\sqrt{a + b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{16 + 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} + \sqrt{9}$				
$\sqrt{a - b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{16 - 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} - \sqrt{9}$				

Überprüfen Sie selbst: stimmt die Regel?

Potenzen und Wurzeln

Wurzelgesetze

Für positive reelle Zahlen *a, b* und ganze Zahlen m, n gilt:

(W1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

(W2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(W3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Bemerkung (Zusammenhang Wurzel und Potenz)

Wurzelziehen als Potenzieren mit einer rationalen Zahl x = $\frac{m}{n}$:

Für Potenzen und Wurzeln mit einer positiven (reellen) Zahl a und zwei natürlichen Zahlen *n, m* gilt:

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Potenzen und Wurzeln

Achtung

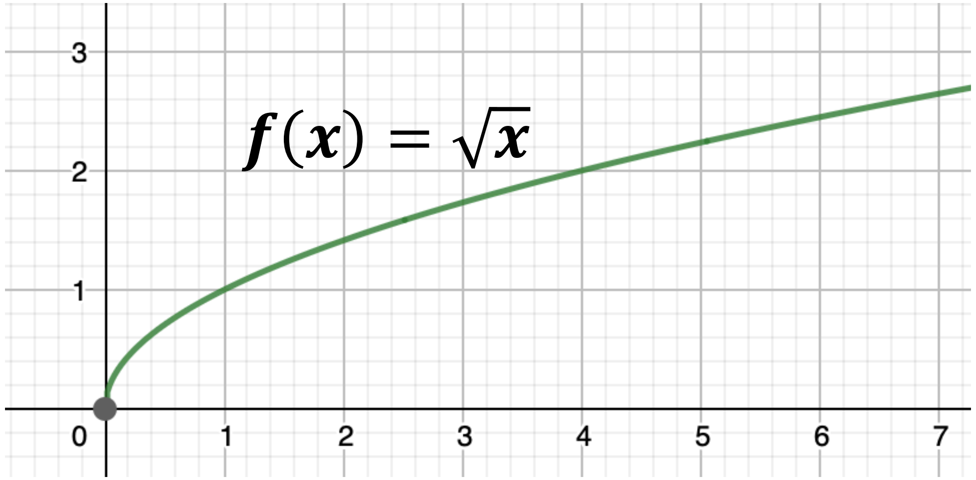
Die Umkehrung von Wurzel und Potenz ist bei geraden Wurzelexponenten nicht eindeutig.

z.B. gilt $(-2)^2 = 4 = 2^2$

Was ist also $\sqrt{4}$?

Die Wurzel, als **Funktion** aufgefasst, ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu.

Demnach ist $\sqrt{4}$ 2 = und nicht $\sqrt{4} = \pm 2$



Potenzen und Wurzeln

Potenzieren und Wurzelziehen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $\dfrac{2x^4 \cdot 5x^6}{4y^9} : \dfrac{5x^2 \cdot 4x^3}{8y^8}$

b) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{20} + 2\sqrt{45}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}}$

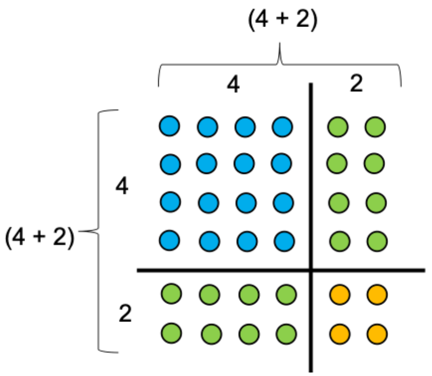
Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Organisation
2. Potenzen und Wurzeln
3. Binomische Formeln
4. Summen und Produkte

1. Binomische Formel

1. Binomische Formel

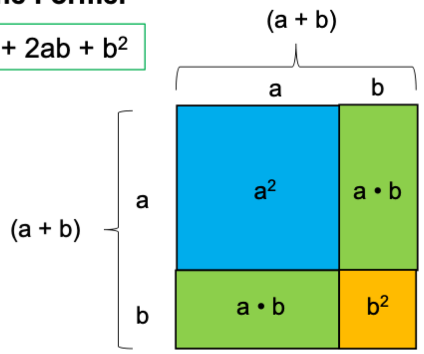
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



generisches
Punktefeld

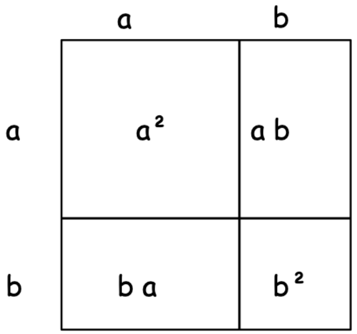
1. Binomische Formel

$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$



allgemeines
Rechteck

1. Binomische Formel



$\cdot$	a	b
a	a^2	ab
b	ba	b^2

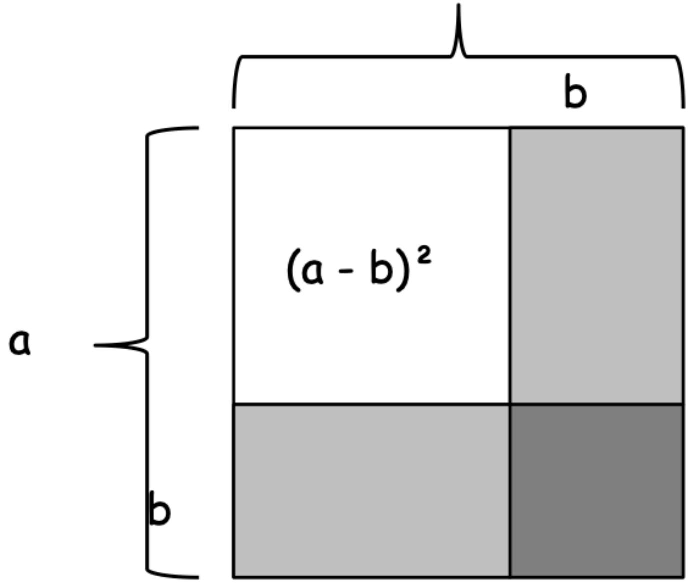
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Binomische Formeln

2. Binomische Formel

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2. Binomische Formel



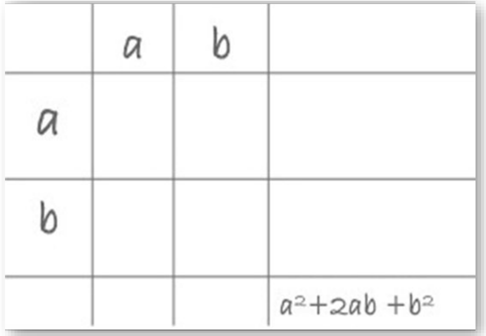
$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ba$	b^2

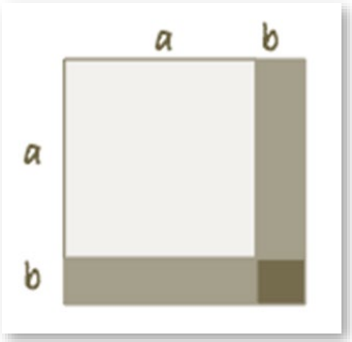
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Binomische Formeln visualisieren

Zeigen Sie im Malkreuz und im Bild:

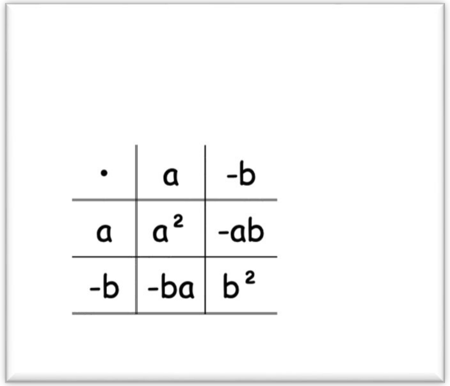
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

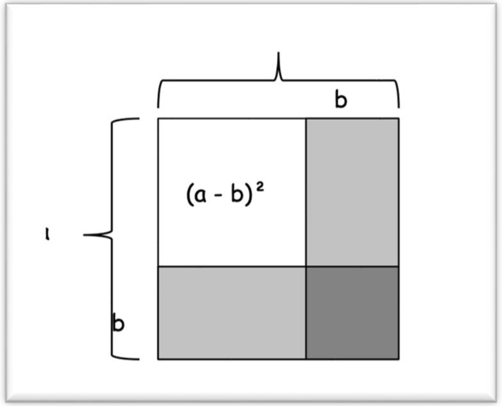




Überlegen Sie analog nun auch für die 2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$





… und für die dritte?

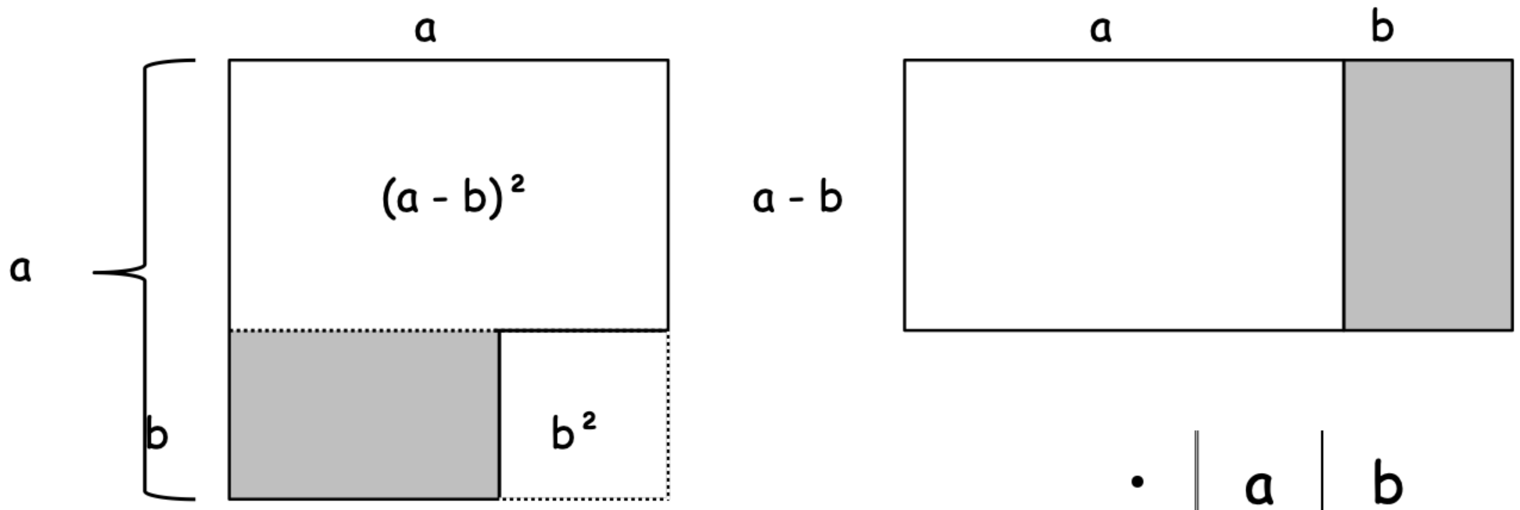
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Binomische Formeln

3. Binomische Formel

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

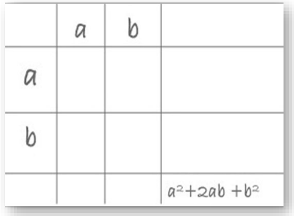
3. Binomische Formel

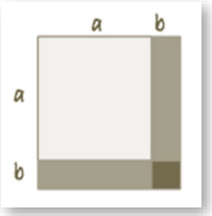


$\cdot$	a	b
a	a^2	ab
$-b$	$-ba$	$-b^2$

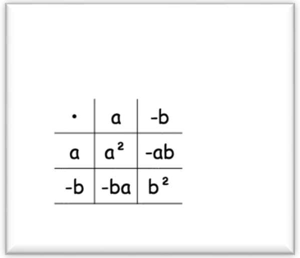
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

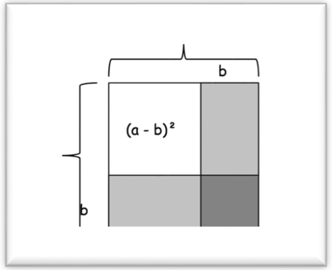
Binomische Formeln visualisieren



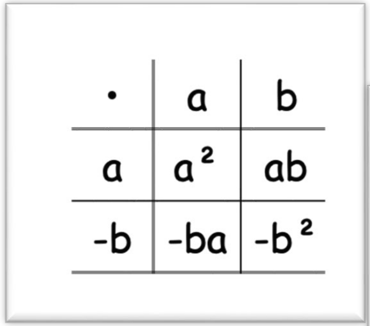


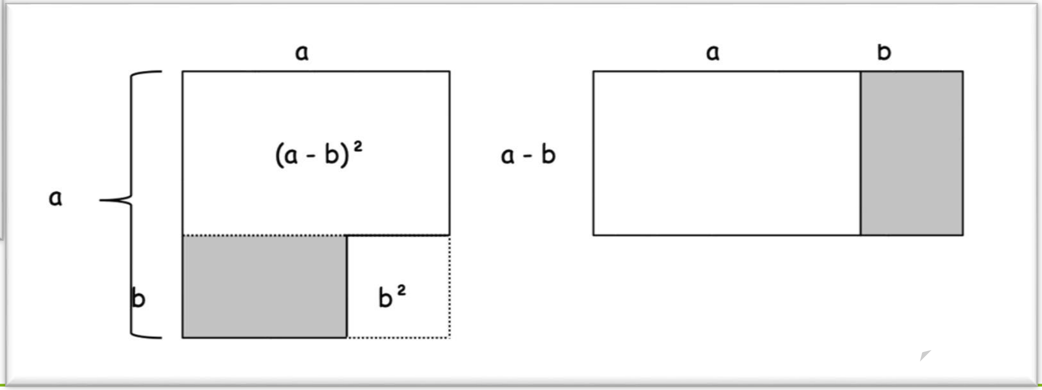
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$





$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$





$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Organisation
2. Potenzen und Wurzeln
3. Binomische Formeln
4. Summen und Produkte

Summen und Produkte

Definition *Summe*:

Das Summenzeichen ist wie folgt definiert:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

Hierbei heißt die natürliche Zahl i der Index (Pl: Indizes) des Objekts.

Beispiele

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{i=0}^{3} \left(\frac{i}{2}\right)^2 = \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}.$$

Summen und Produkte

Definition *Produkt*:

Das Produktzeichen ist wie folgt definiert:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n.$$

Hierbei heißt i der Index (Pl: Indizes).

Beispiele

$$\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$$

$$\prod_{i=0}^{3} (i+1)^2 = (0+1)^2 \cdot (1+1)^2 \cdot (2+1)^2 \cdot (3+1)^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576$$

Summen und Produkte

Berechnen Sie den Wert der folgenden Summen bzw. Produkte:

a) $\sum_{k=0}^{3} 2^k$

b) $\sum_{n=5}^{10} (2n+1)$

c) $\prod_{i=1}^{3} \frac{1}{i}$

Summen und Produkte

Finden Sie eine kompakte Schreibweise mit dem Summen- oder Produktzeichen für die folgenden Terme:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$
b) $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16$
c) $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17$

Summen und Produkte

Definition *Fakultät*:

Die Fakultät ist wie folgt definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n-1 \cdot n$$

alternative Produktschreibweise:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Spezialfall

$0! = 1$

Fragen? Vielen Dank!

Literatur