technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Michele Serra

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Vorkurs Mathematik

im Wintersemester 2024

Aufgabe 1) (Definitionsbereich einer Funktion)

Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen an, deren Funktionsvorschrift wie folgt gegeben ist:

(a) $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x - 97$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x-2}$

(d) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{|x|}{x+2}$

Minima und Maxima

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D (hier eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, also $D \subset \mathbb{R}$) und Wertbereich $\mathbb{R}$:

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$

- Ein *globales Minimum* von f ist ein element $u \in D$ mit der Eigenschaft, dass f keinen kleineren Wert als $f(u)$ annimmt. Anders gesagt: für alle $x \in D$ gilt $f(x) \geq f(u)$.
- Ein *globales Maximum* von f ist ein element $t \in D$ mit der Eigenschaft, dass f keinen größeren Wert als $f(t)$ annimmt. Anders gesagt: für alle $x \in D$ gilt $f(x) \leq f(t)$.

Warnung! Ein globales Minimum (bzw. Maximum) muss nicht existieren und, falls es eins gibt, muss nicht eindeutig sein.

Aufgabe 2) (Minimum/Maximum einer Funktion)

Für jede der folgenden Funktionen

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

iii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$

iv) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

v) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 3$

(a) Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

(b) Benennen Sie, falls es sie gibt, die (globalen) Minima und/oder Maxima.

(c) Begründen Sie Ihre bei (b) gegebene Antworte.

Aufgabe 3) (Abhängigkeit der Minima/Maxima vom Definitionsbereich)

Betrachten Sie nun die Funktionen aus den obigen Aufgaben, mit den folgenden Definitionsbereichen. Wie ändern sich die Minima/Maxima?

(a) $f\colon (-\infty, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

(a') $f\colon [-12,\ 18)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

(b) $f\colon (-3, 3) \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

(b') $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

(c) $f\colon\ \left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$

Produktenzeichen

Ähnlich wie bei Summen, kann man auch Produkte kompakt darstellen. Hierzu wir das symbol Π (großes Pi) benutzt. Die Syntax ist genau dieselbe:

$$\prod_{j=1}^{N} x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_N$$

Also, z.B.

$$\prod_{j=1}^{3} x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \qquad \text{oder} \qquad \prod_{j=1}^{4} 2^j = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = 1024$$

Hitergrund und Aufgaben zum Produktenzeichen findet man in
E. Cramer and J. Nešlehová. *Vorkurs Mathematik*. 2018, Abschnitte 4.2 und 4.4.

Bemerkung: Ein wichtiger Fall ist das Produkt der ersten n von null verschiedenen natürlichen Zahlen: $\prod_{j=1}^{n} j$. Dieses wird mit $n!$ bezeichnet und "n fakultät" genannt. Also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{j=1}^{n} j$$

z.B.: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \ldots, 10! = 3628800 \ldots$

Bonusaufgabe) (Produktenzeichen)

Diese Aufgaben ist als Bonus zu verstehen.

(a) Berechnen Sie die folgende Ausdrücke

i) $\prod_{j=2}^{6} 2$ ii) $\prod_{j=2}^{54} 1$ iii) $\prod_{m=1}^{3} \frac{m+1}{(m-1)^2}$ iv) $\prod_{l=3}^{3} \frac{l+1}{(l-1)^2}$

(b) Drücken Sie die folgende Produkte anhand vom Produktenzeichen aus

i) Das Produkt aller geraden natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100

ii) Das Produkt aller Mehrfachen von 6 zwischen 20 und 112.