technische universität
dortmund

Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts

Vorkurs – VL 2

Orientierung in den Zahlenräumen

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Organisation
2. Orientierung in neuen Zahlenräumen
3. Rechengesetze

Organisation

Raumplan und Übungsleitung

	Uhrzeit	Montag - Freitag	Übungsleitung
Gruppe L101	10.15 – 11.45 Uhr	E23	Inga
Gruppe L102		E21	Sophie
Gruppe L103		CDI 119	Ronja
Vorlesung	12.15 - 13.45 Uhr	E 29	
Gruppe L201	14.15 – 15.45 Uhr	E23	Inga
Gruppe L202		E21	Sophie
Gruppe L203		E19	Anton

Vorkurs

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/laufende-fragensammlung-vorkurs-lcjt56vkuzkk4m2p

Padlet für Fragen

Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Organisation
2. Orientierung in neuen Zahlenräumen
3. Rechengesetze

Orientierung in neuen Zahlenräumen

Was sagt der Lehrplan?

Zahlen und Operationen

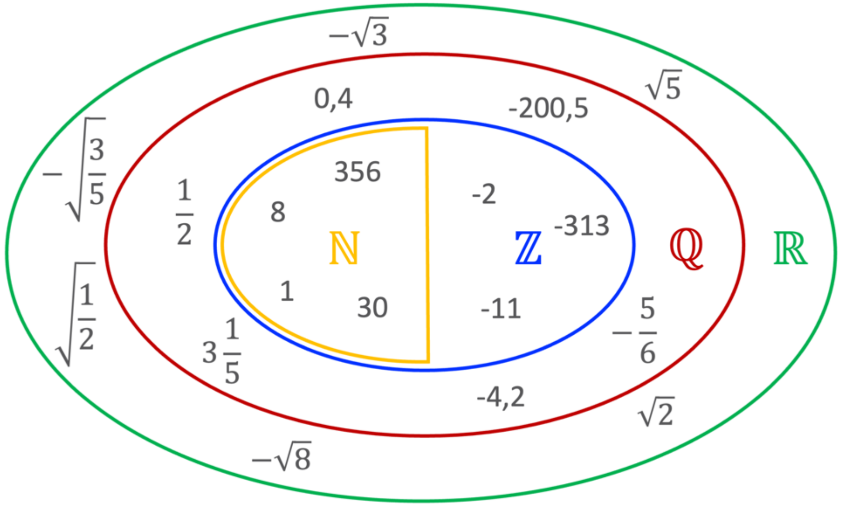
Zahlverständnis	
Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase Die Schülerinnen und Schüler	Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4 Die Schülerinnen und Schüler
• zählen im Zahlenraum bis 100 (vorwärts, rückwärts, in Schritten, beliebige Startzahl),	• zählen im Zahlenraum bis 1.000.000 (vorwärts, rückwärts, in Schritten, beliebige Startzahl),
• benennen und schreiben Zahlen im Zahlenraum bis 100,	• benennen und schreiben Zahlen im Zahlenraum bis 1 000 000,
• stellen Zahlen im Zahlenraum bis 100 unter Anwendung der Struktur des Zehnersystems dar (Prinzip der Bündelung, Stellenwertschreibweise),	• stellen Zahlen im Zahlenraum bis 1.000.000 unter Anwendung der Struktur des Zehnersystems dar (Prinzip der Bündelung, Stellenwertschreibweise),
• wechseln bei der Zahldarstellung und der Anzahlerfassung im Zahlenraum bis 100 zwischen den verschiedenen Darstellungsformen (mit Material, bildlich, symbolisch und sprachlich),	• wechseln bei der Zahldarstellung und der Anzahlerfassung im Zahlenraum bis 1.000.000 zwischen den verschiedenen Darstellungsformen (mit Material, bildlich, symbolisch, sprachlich),
	• wandeln Zahlen des Dezimalsystems in Zahlen des Binärsystems um und umgekehrt,
• nutzen Strukturen in Zahldarstellungen zur Anzahlerfassung im Zahlenraum bis 100,	• nutzen Strukturen in Zahldarstellungen zur Anzahlerfassung im Zahlenraum bis 1.000.000,
• ordnen und vergleichen Zahlen im Zahlenraum bis 100,	• ordnen und vergleichen Zahlen im Zahlenraum bis 1.000.000
• beschreiben Beziehungen zwischen Zahlen und in Zahlenfolgen (u. a. ist der Vorgänger/Nachfolger von, ist die Hälfte/das Doppelte von, ist um x kleiner/größer als).	

Orientierung in neuen Zahlenräumen

Zahlbereichserweiterungen über die Schuljahre hinweg

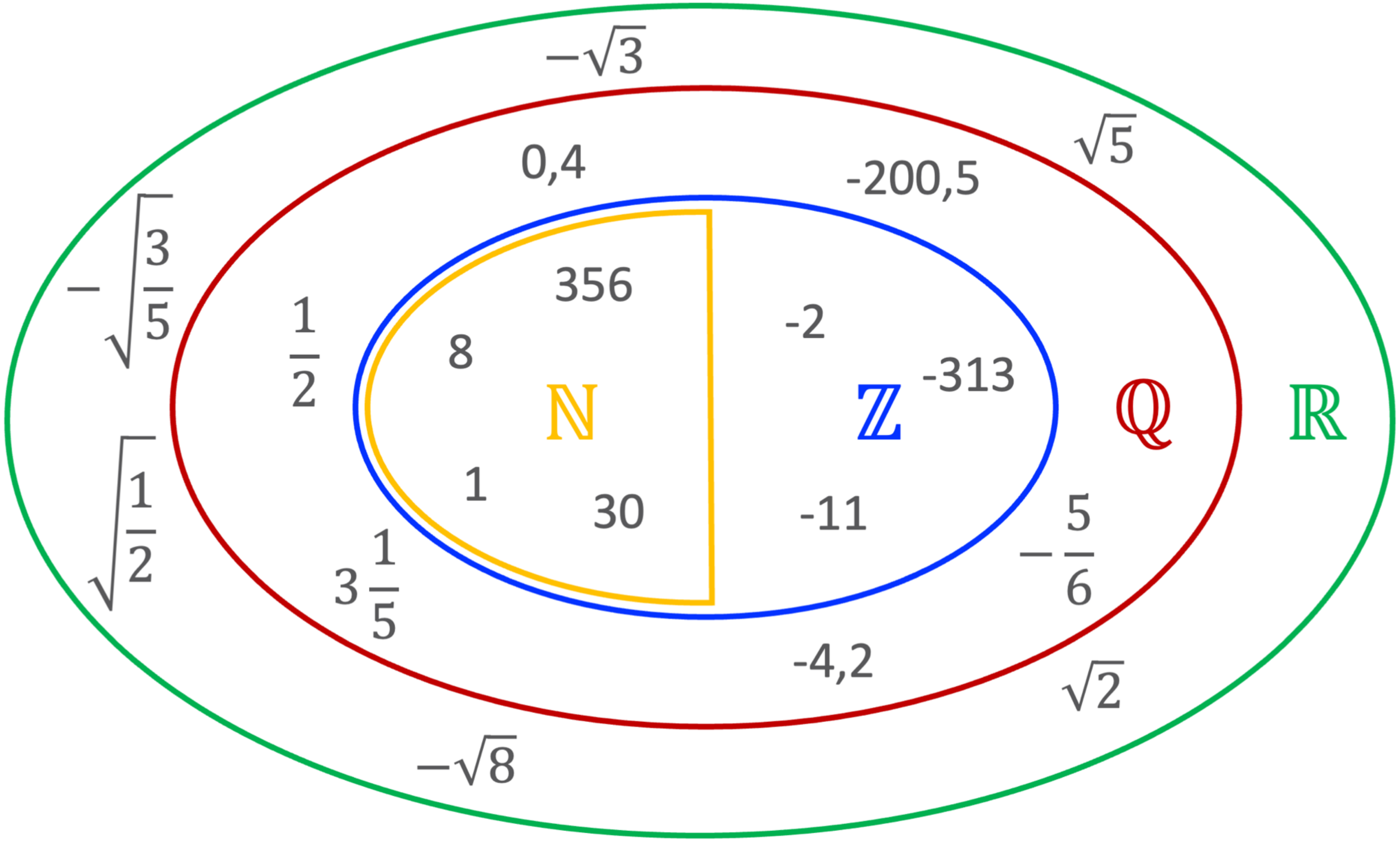
Klasse 1 – bis 20
Klasse 2 – bis 100
Klasse 3 – bis 1000
Klasse 4 – bis 1 000 000

Natürliche Zahlen



Klasse 5 – Ganze Zahlen (negative Zahlen)
Klasse 6 – gebrochene Zahlen (Brüche)
Klasse 7/8 – rationale Zahlen
Klasse 9/10 – irrationale Zahlen → reelle Zahlen

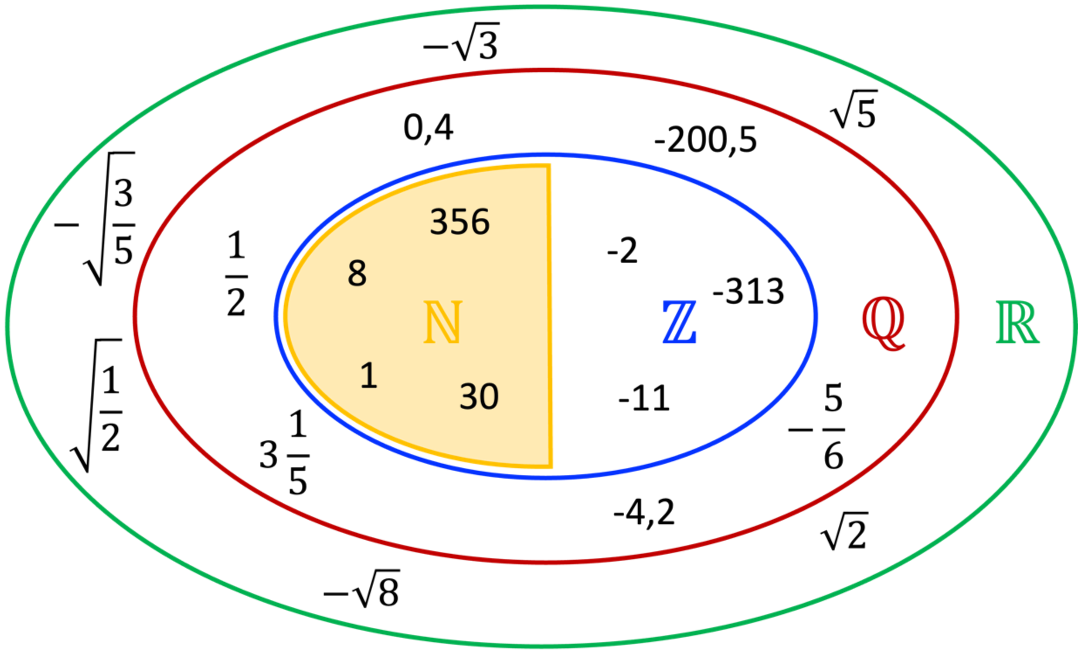
Orientierung in neuen Zahlenräumen



Orientierung in neuen Zahlenräumen

Natürliche Zahlen

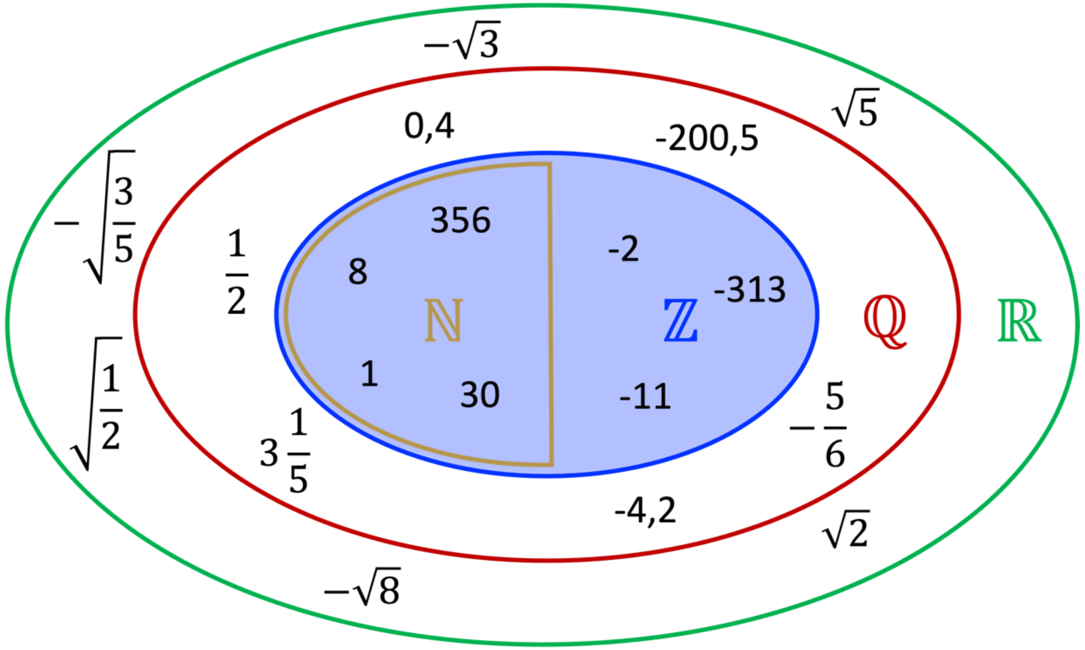
- Symbol: $\mathbb{N}$
- bildet das Zählen als natürlichen Prozess ab
- Menge der natürlichen Zahlen:
  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots\}$
  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots\}$



Orientierung in neuen Zahlenräumen

Ganze Zahlen

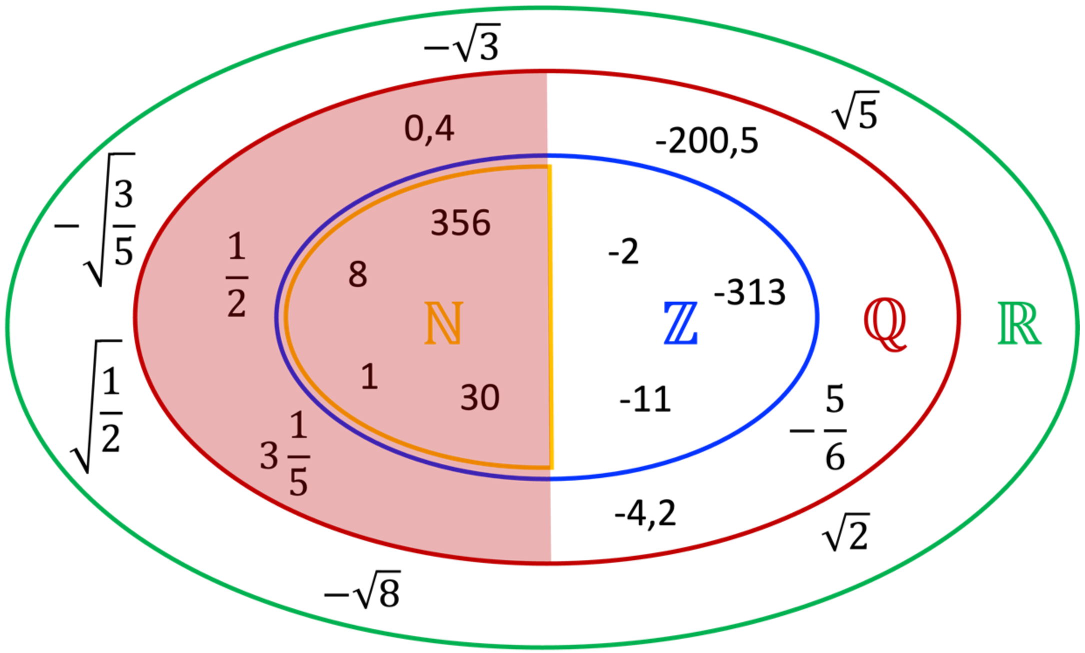
- Symbol: $\mathbb{Z}$
- Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen
- Menge der ganzen Zahlen sind alle **positiven und negativen Zahlen ohne Komma**:
  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- uneingeschränktes Subtrahieren möglich



Orientierung in neuen Zahlenräumen

Gebrochene Zahlen

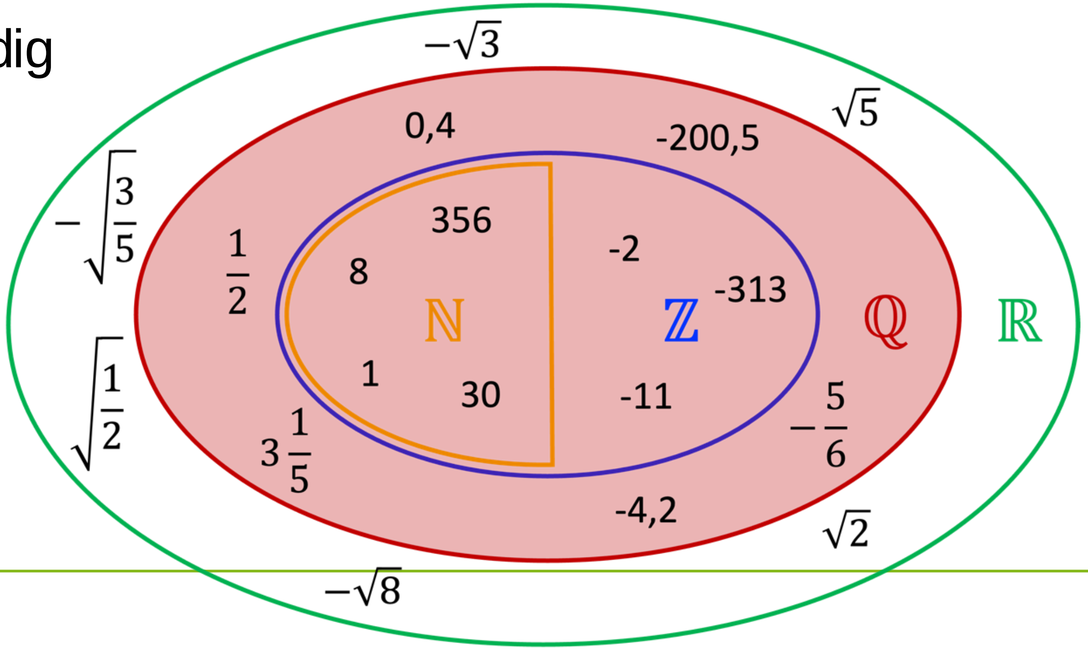
- Symbol: $\mathbb{Q}^+$
- Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen/ positiv ganzen Zahlen um die positiven Bruchzahlen bzw. Dezimalzahlen, die sich in einem Bruch darstellen lassen
- enthält alle **positiven Brüche**



Orientierung in neuen Zahlenräumen

Rationale Zahlen

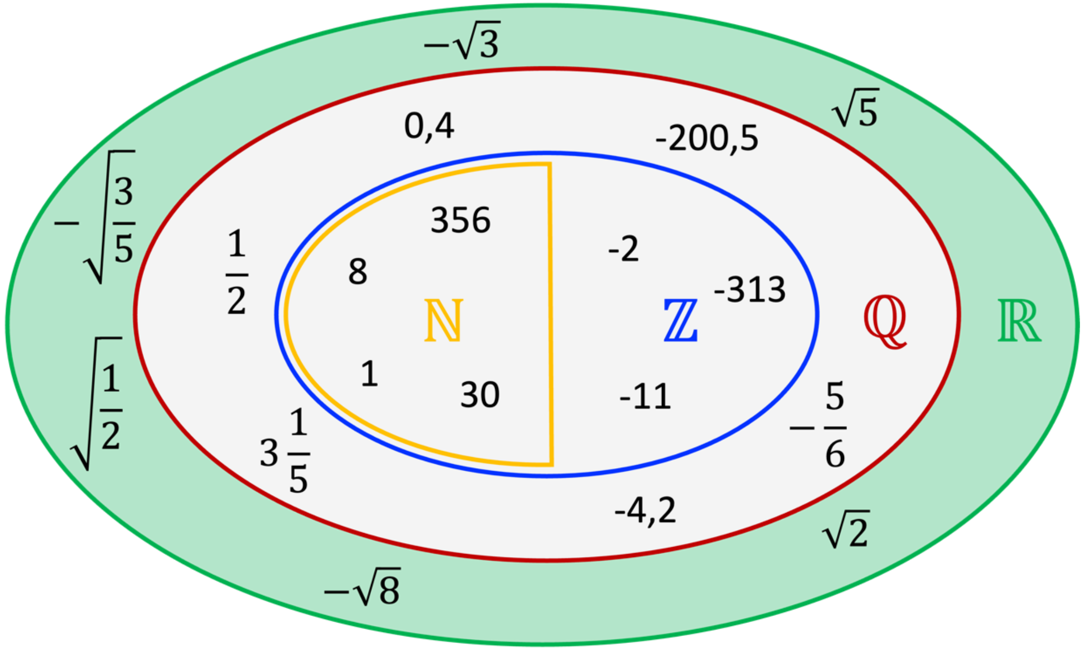
- Symbol: $\mathbb{Q}$
- Erweiterung des Zahlenbereichs der gebrochenen Zahlen um die **negativen Bruchzahlen**
- alle Grundrechenarten sind uneingeschränkt ausführbar
- $\mathbb{Q}$ enthält alle positiven und negativen Brüche, sowie alle **abbrechenden Dezimalbrüche** (z.B. −3,75) und periodischen Dezimalbrüche (z.B. 0,66666…0,66666…).
- Bei den rationalen Zahlen ist nur eines nicht vollständig erlaubt: das Wurzelziehen.
- Manche Wurzeln dürfen gezogen werden:
  - ➢ $\sqrt{9} = 3$
  - ➢ $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$



Orientierung in neuen Zahlenräumen

Irrationale Zahlen

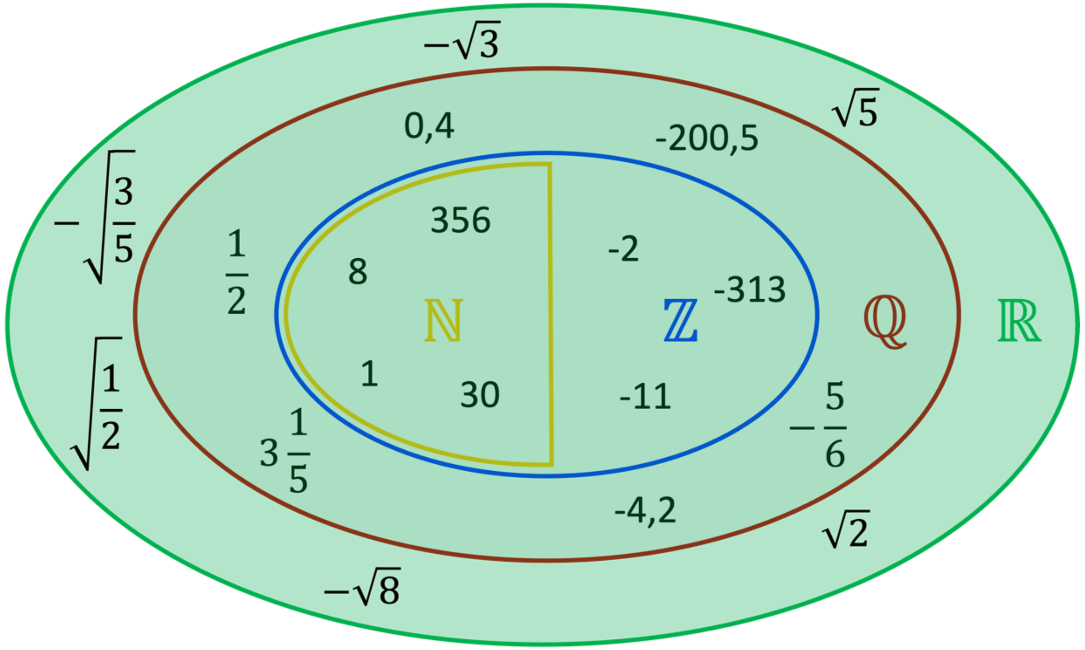
- Symbol: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
- Manche Wurzeln sind **unendlich lange Dezimalzahlen** und nicht als Bruch darstellbar. Das sind irrationale Zahlen.
- Beispiele:
  - $\sqrt{2}$ = 1,4142135623730…
  - $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$



Orientierung in neuen Zahlenräumen

Reelle Zahlen

- Symbol: $\mathbb{R}$
- Vereiningung der rationalen und irrationalen Zahlen
- alle positiven und negativen Bruchzahlen sowie alle Wurzeln
- Aus negativen Zahlen können keine Wurzeln gezogen werden. $\sqrt{-4}$ ist nicht definiert.
  Solche Zahlen sind nicht in den reellen
  Zahlen $\mathbb{R}$ enthalten



Orientierung in neuen Zahlenräumen

Quiz

Jetzt sind Sie dran.
Ordnen Sie die Zahlen
den passenden Zahlbereichen zu.

https://learningapps.org/watch?v=pbe0iyrp522

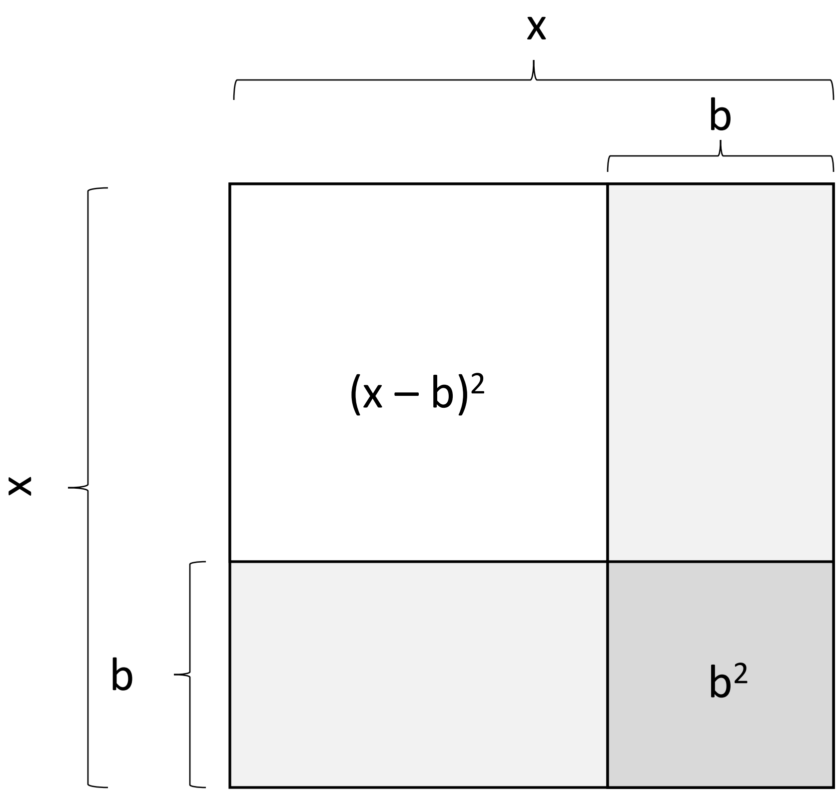
Aufbau der heutigen Vorlesung

1. Organisation
2. Orientierung in neuen Zahlenräumen
3. Rechengesetze

Rechengesetze

Überlegen Sie: Welche Bilder haben Sie zu $(x - b)^2$ im Kopf?
Skizzieren Sie ihre Gedanken und laden Sie diese auf dem Padlet hoch.
Wir befinden uns gedanklich im Zahlenraum der natürlichen Zahlen.

Rechengesetze



$\cdot$	x	-b
x	x^2	-xb
-b	-bx	b^2

$$(x-b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$$

Rechengesetze

Lösen Sie die Gleichung nach x auf.
Markieren Sie die Umformungen, bei denen Sie Rechengesetze nutzen.
Sie müssen die Rechengesetze noch nicht benennen.

$$(x-b)^2+2(xb-b^2)=10-(b^2+1)$$

Rechengesetze

Operationseigenschaften und Rechengesetze

	Addition	Multiplikation	Subtraktion	Division
Kommutativ-gesetz	$a + b = b + a$ Summanden vertauschen	$a \cdot b = b \cdot a$ Faktoren vertauschen		
Assoziativ-gesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$ *Summanden zerlegen*	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *Faktoren zerlegen*		
Distributiv-gesetz	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$ $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$ *Faktoren verteilen*			

Rechengesetze

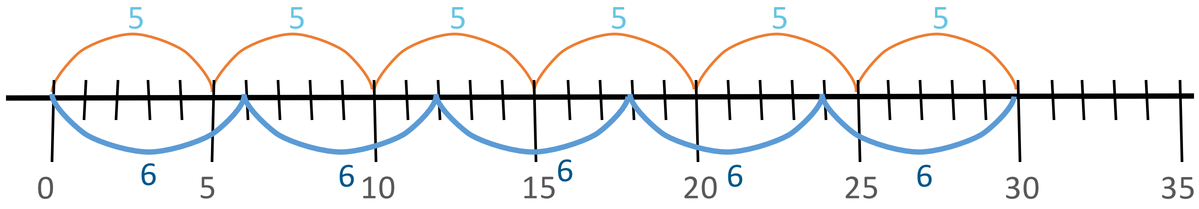
Kommutativgesetz

$$
\begin{aligned}
& (x-b)^2 + 2(xb - b^2) = 10 - (1 + b^2) \\
\Leftrightarrow\ & (x-b)\cdot(x-b) + 2xb - 2b^2 = 10 - 1 - b^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2xb + b^2 + 2xb - 2b^2 = 9 - b^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - b^2 = 9 - b^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 9 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3
\end{aligned}
$$

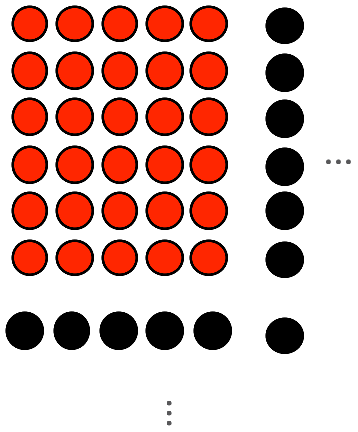
Rechengesetze

Kommutativgesetz verstehen: Faktoren vertauschen

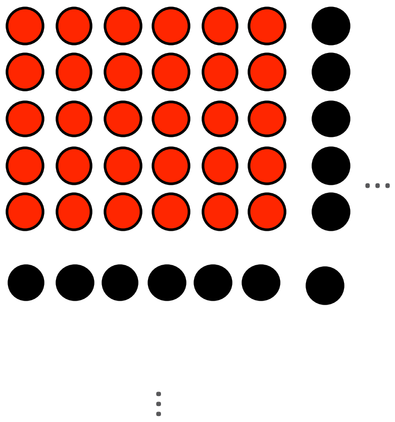
Multiplikation $a \cdot b = b \cdot a$



$6 \cdot 5$



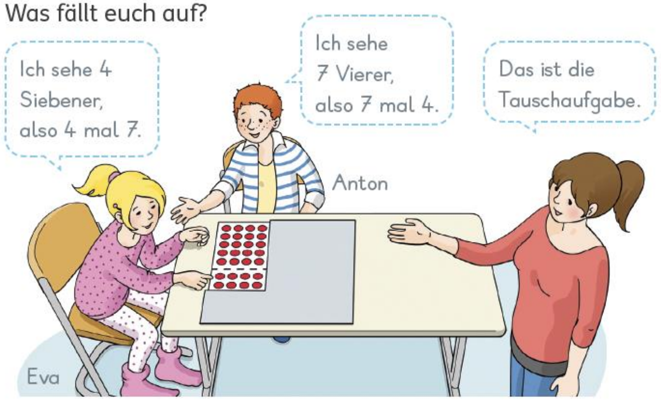
$5 \cdot 6$



Rechengesetze

Im Schulbuch

○ **1** **Tauschaufgaben.** Zeigt mit dem Malwinkel und rechnet. Was fällt euch auf?



Tauschaufgaben

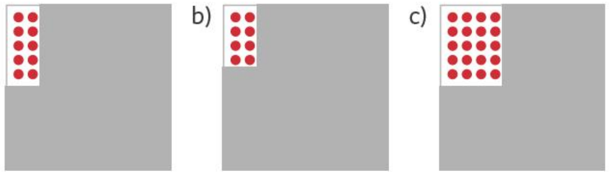
1. Zahl   2. Zahl

$4 \cdot 7 = 28$

$7 \cdot 4 = 28$

Ergebnis

a) b) c)



d) Zeigt und findet ebenso Aufgaben und Tauschaufgaben.

○ **2** Zeigt mit dem Malwinkel am Hunderterfeld. Rechnet.

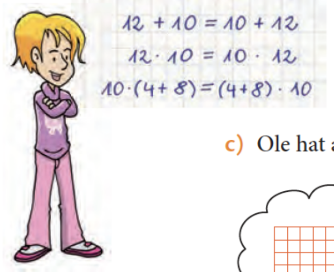
a)	b)	c)	d)	e)
$5 \cdot 3$	$7 \cdot 2$	$8 \cdot 10$	$6 \cdot 5$	$2 \cdot 9$
$3 \cdot 5$	$2 \cdot 7$	$10 \cdot 8$	$5 \cdot 6$	$9 \cdot 2$

(Zahlenbuch 2, S. 70)

7 Umformen mit Vertauschungsgesetz und Zerlegungsgesetz

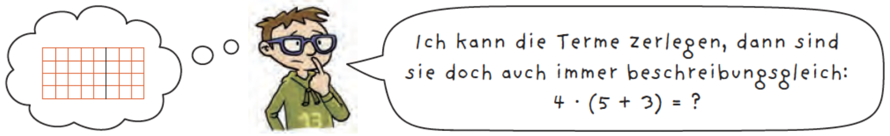
✱ Neues Wort ***Vertauschungsgesetz*** *und* ***Zerlegungsgesetz*** *helfen dabei, Terme umzuformen.*

a) Pia hat eine Regel gefunden, wie sie immer beschreibungsgleiche Terme findet.
- Schreibe zwei eigene Beispiele zu Pias Entdeckung in dein Heft.
- Stimmt Pias Gesetz bei allen Zahlen? Erkläre mit Bildern oder Situationen.
- Was meinst du, warum heißt diese Regel *Vertauschungsgesetz*✱?



b) Stimmt Pias Gesetz auch beim Subtrahieren (z. B. $5 - 3$) und beim Dividieren (z. B. $10 : 2$)? Prüfe an eigenen Beispielen.

c) Ole hat auch etwas entdeckt. Erkläre, wie er den Term umformt.



d) Führe Oles Idee fort und finde den zerlegten Term.
- Begründe an Oles Bild, warum die Terme beschreibungsgleich sind.
- Stimmt Oles *Zerlegungsgesetz*✱ bei allen Zahlen?
- Was wird dabei überhaupt zerlegt?

$3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$

$4 \cdot (3 + 5)$ $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$ $4 \cdot 3 + 5 \cdot 4$

$3 \cdot (4 + 5)$

e) Einige der Terme links sind beschreibungsgleich.
- Schreibe sie, wie Ole, mit Gleichheitszeichen.
- Gib für jede Umformung an, ob du mit dem *Vertauschungs-* oder dem *Zerlegungsgesetz* umformst oder mit beiden.

▸ Materialblock S. 65
Wissensspeicher *Beschreibungsgleiche Terme finden*

f) Vergleicht eure Antworten aus a) bis e) und tragt sie in den Wissensspeicher ein.

weitergedacht

g) Warum kann man $4 + (5 \cdot 3)$ nicht wie Ole in c) zerlegen?

(Mathewerkstatt 6, S. 111)

Rechengesetze

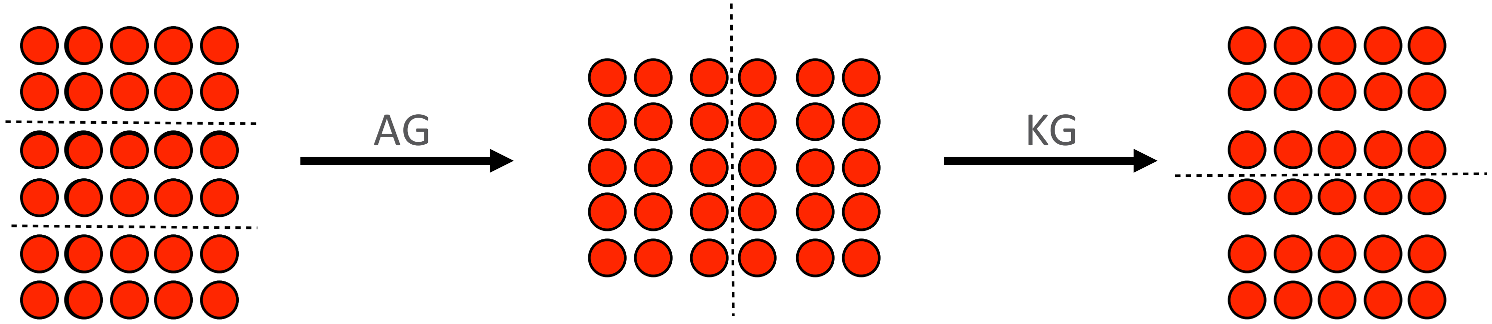
Assoziativgesetz

$$
\begin{aligned}
& & (x-b)^2 + 2(xb-b^2) &= 10-(1+b^2) \\
&\Leftrightarrow & (x-b)\cdot(x-b) + 2xb - 2b^2 &= 10-1-b^2 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 2xb + b^2 + 2xb - 2b^2 &= 9-b^2 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - b^2 &= 9-b^2 \\
&\Leftrightarrow & x^2 &= 9 \\
&\Leftrightarrow & x &= 3
\end{aligned}
$$

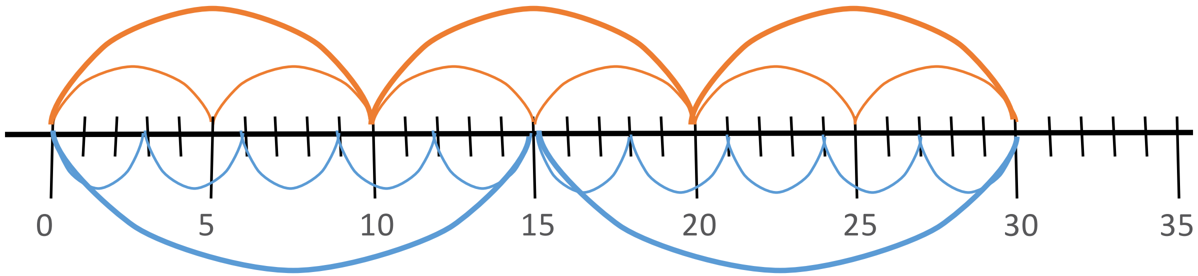
Rechengesetze

Assoziativgesetz verstehen: Faktoren verknüpfen/verbinden

Multiplikation $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$



$(2 \cdot 5) \cdot 3$ $\quad$ $2 \cdot (5 \cdot 3)$ $\quad$ $2 \cdot (3 \cdot 5)$



Rechengesetze

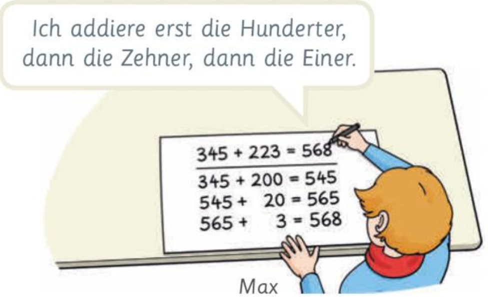
Im Schulbuch

○ **4** **Schrittweise.**
Rechne und schreibe den Rechenweg wie Max.

a) 345 + 223   b) 743 + 219

c) 634 + 186   d) 563 + 377

e) Finde weitere Aufgaben, die du mit dem Rechenweg S rechnest.



(Zahlenbuch 3, S. 51)

13 Klammern streichen

a) Schreibe die Terme mit möglichst wenig Klammern, ohne ihren Wert zu verändern:

(1) $(17 + 4) + 21$
$21 + (17 + 4)$

(2) $(17 + 4) - 21$
$21 - (17 + 4)$

(3) $(17 + 4) \cdot (12 \cdot 5)$
$17 + (4 \cdot 12 \cdot 5)$
$(17 + 4 \cdot 12) \cdot 5$

(4) $(64 : 8) \cdot 4$
$64 : (8 \cdot 4)$

b) Welche Terme haben denselben Wert?
Kannst du erklären, woran das liegt?

(Mathewerkstatt 6, S. 117)

Rechengesetze

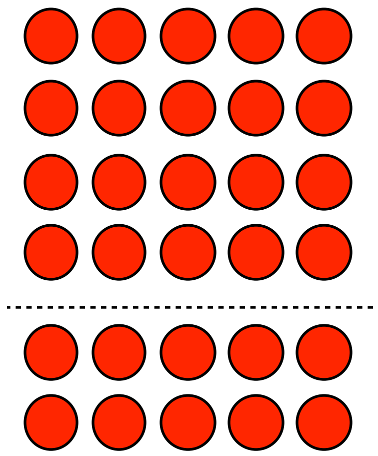
Distributivgesetz

$$
\begin{aligned}
& (x-b)^2 + 2(xb-b^2) = 10-(1+b^2) \\
\Leftrightarrow\quad & (x-b)\cdot(x-b) + 2xb-2b^2 = 10-1-b^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-2xb+b^2+2xb-2b^2 = 9-b^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-b^2 = 9-b^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 = 9 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 3
\end{aligned}
$$

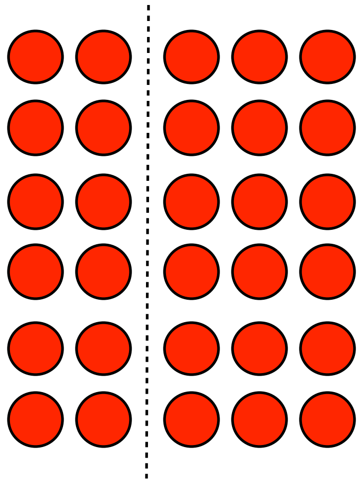
Rechengesetze

Distributivgesetz verstehen: Faktoren verteilen

Multiplikation $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



$(4 + 2) \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5$

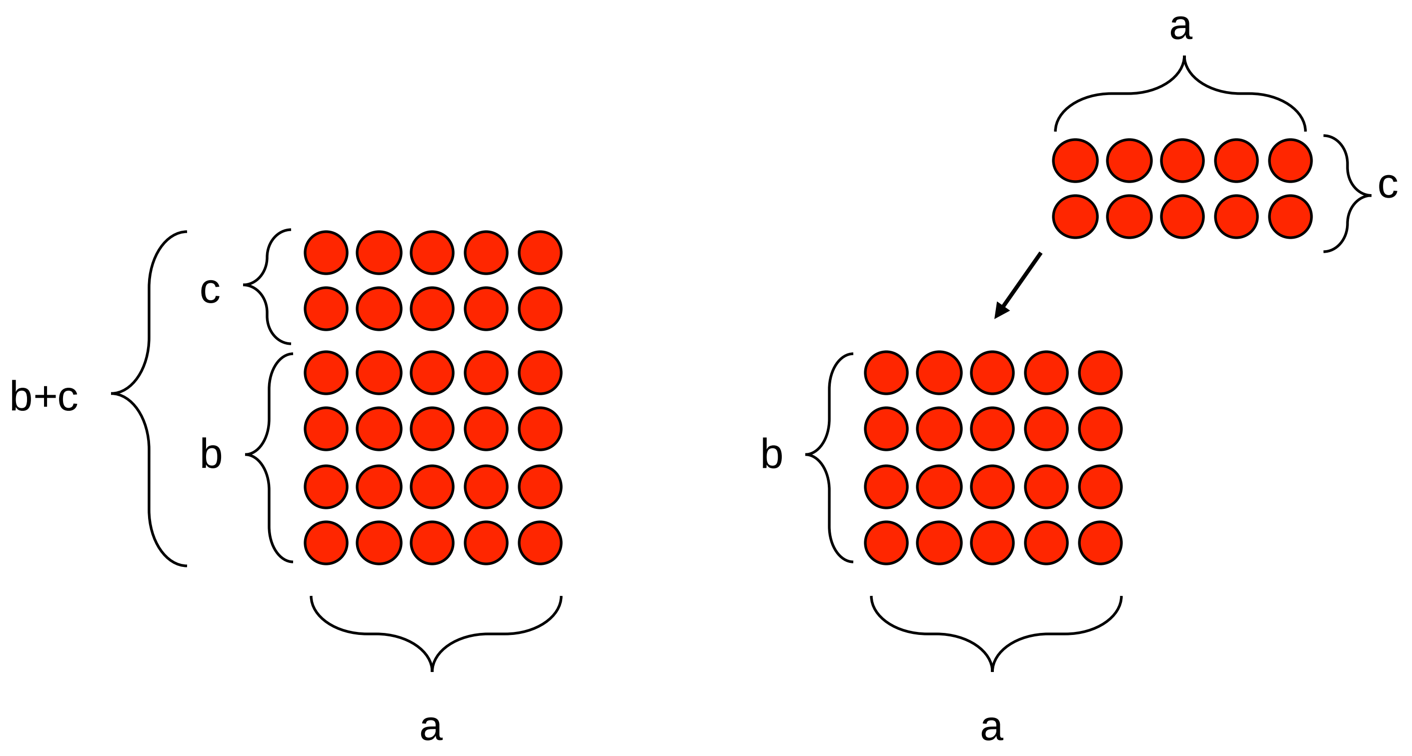


$6 \cdot (2 + 3) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3$

Rechengesetze

Distributivgesetz verstehen: Faktoren verteilen

Multiplikation $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

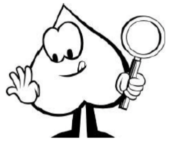


Rechengesetze

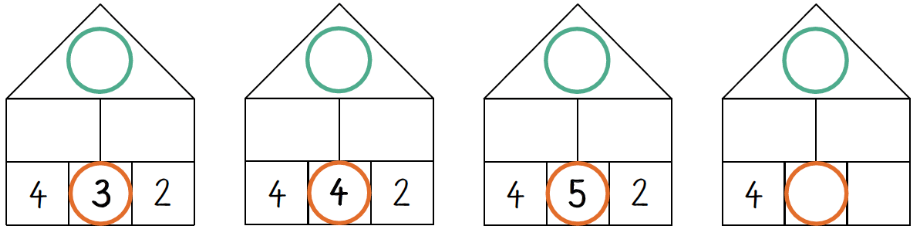
Distributivgesetz

Im Schulbuch

Auftrag zum Forschen 4



Was passiert mit der Zielzahl, wenn die mittlere Grundzahl immer um 1 größer wird?



Beschreibe, was mit der Zielzahl passiert.

Die Zielzahl ____

____

(Pikas, Mal-Plus-Haus Forscherheft)

7 Umformen mit Vertauschungsgesetz und Zerlegungsgesetz

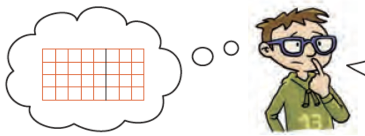
* *Neues Wort* ***Vertauschungsgesetz*** *und* ***Zerlegungsgesetz*** *helfen dabei, Terme umzuformen.*

a) Pia hat eine Regel gefunden, wie sie immer beschreibungsgleiche Terme findet.
- Schreibe zwei eigene Beispiele zu Pias Entdeckung in dein Heft.
- Stimmt Pias Gesetz bei allen Zahlen? Erkläre mit Bildern oder Situationen.
- Was meinst du, warum heißt diese Regel *Vertauschungsgesetz**?

$12 + 10 = 10 + 12$
$12 \cdot 10 = 10 \cdot 12$
$10 \cdot (4 + 8) = (4 + 8) \cdot 10$

b) Stimmt Pias Gesetz auch beim Subtrahieren (z. B. $5 - 3$) und beim Dividieren (z. B. $10 : 2$)? Prüfe an eigenen Beispielen.

c) Ole hat auch etwas entdeckt. Erkläre, wie er den Term umformt.



Ich kann die Terme zerlegen, dann sind sie doch auch immer beschreibungsgleich: $4 \cdot (5 + 3) = ?$

d) Führe Oles Idee fort und finde den zerlegten Term.
- Begründe an Oles Bild, warum die Terme beschreibungsgleich sind.
- Stimmt Oles *Zerlegungsgesetz** bei allen Zahlen?
- Was wird dabei überhaupt zerlegt?

$3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$ | $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$ | $4 \cdot (3 + 5)$ | $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$ | $4 \cdot 3 + 5 \cdot 4$ | $3 \cdot (4 + 5)$

e) Einige der Terme links sind beschreibungsgleich.
- Schreibe sie, wie Ole, mit Gleichheitszeichen.
- Gib für jede Umformung an, ob du mit dem *Vertauschungs-* oder dem *Zerlegungsgesetz* umformst oder mit beiden.

▶ Materialblock S. 65 Wissensspeicher *Beschreibungsgleiche Terme finden*

f) Vergleicht eure Antworten aus a) bis e) und tragt sie in den Wissensspeicher ein.

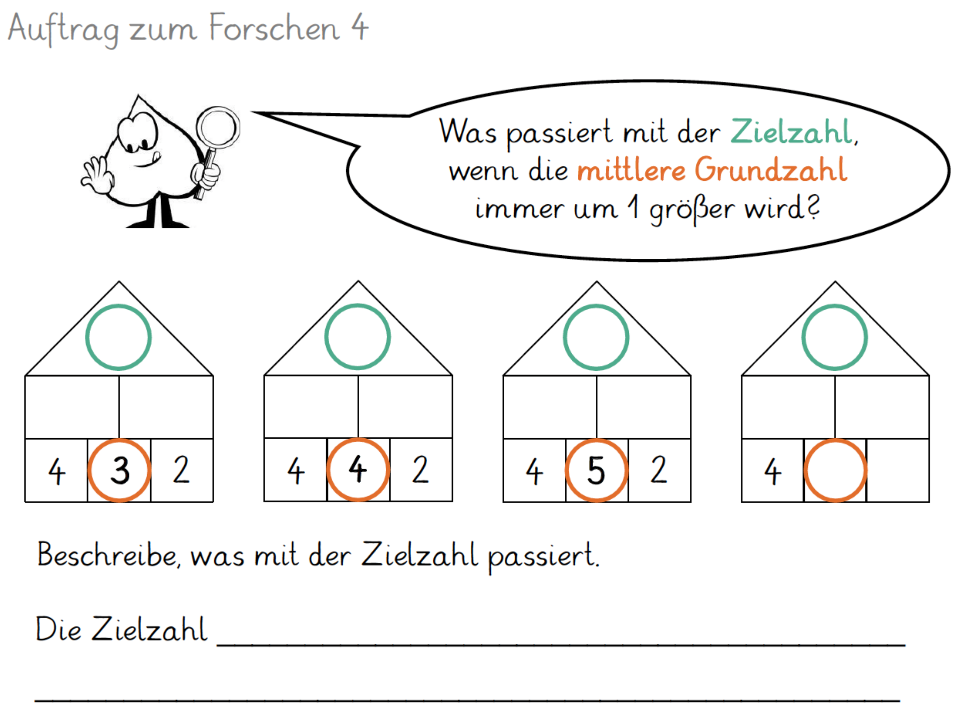
weitergedacht g) Warum kann man $4 + (5 \cdot 3)$ nicht wie Ole in c) zerlegen?

(Mathewerkstatt 6, S. 111)

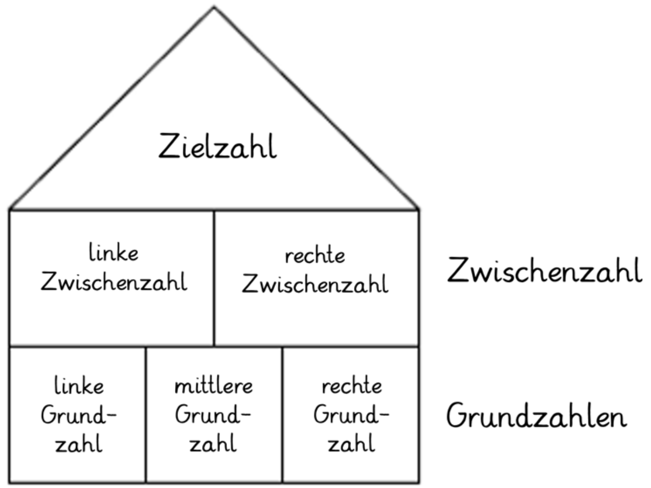
Rechengesetze

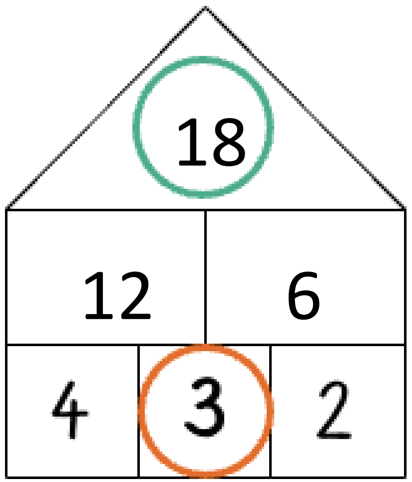
Distributivgesetz

Im Schulbuch



An welcher Stelle wird hier das Distributivgesetz deutlich?

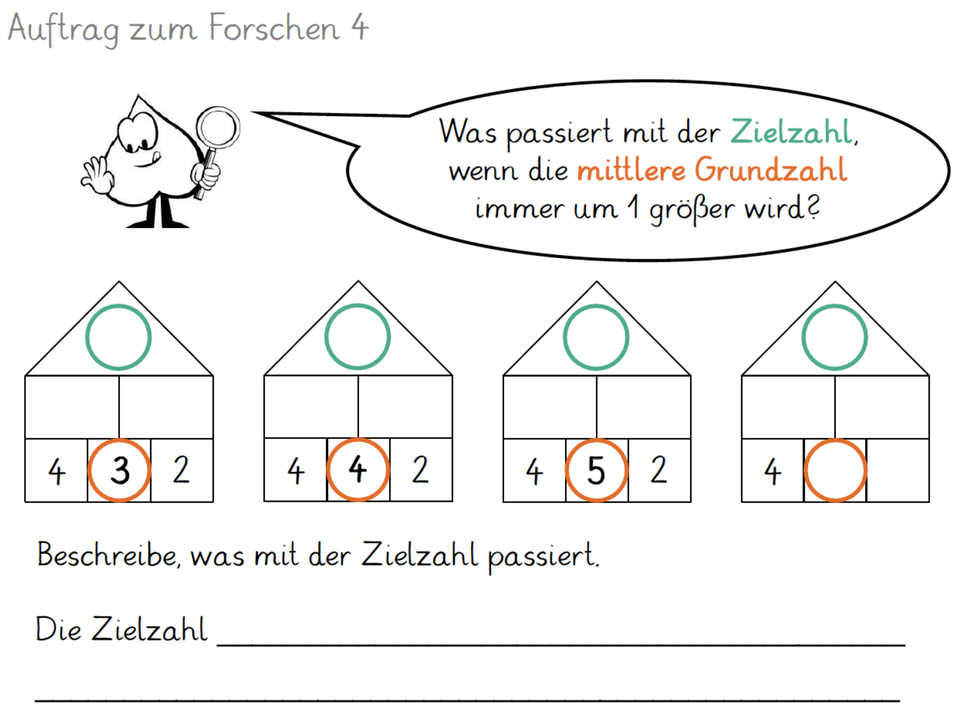




(Pikas, Mal-Plus-Haus Forscherheft)

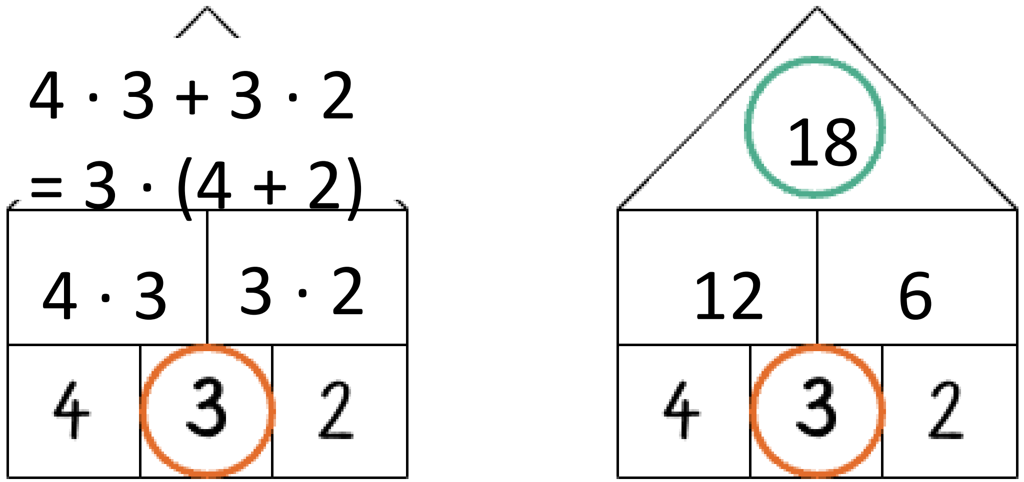
Rechengesetze

Im Schulbuch



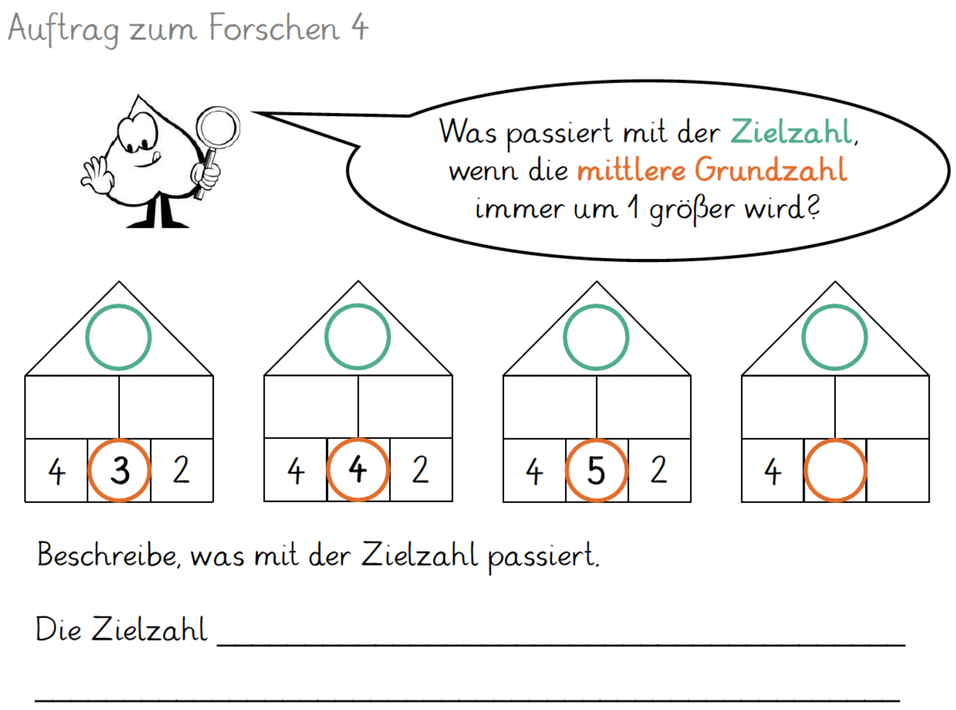
(Pikas, Mal-Plus-Haus Forscherheft)

An welcher Stelle wird hier das Distributivgesetz deutlich?

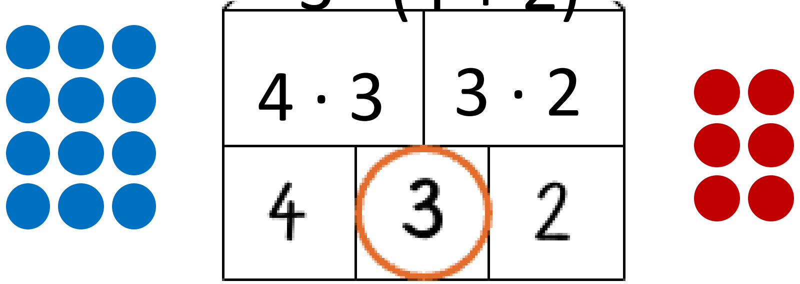


Rechengesetze

Im Schulbuch



$$4 \cdot 3 + 3 \cdot 2$$
$$= 3 \cdot (4 + 2)$$



(Pikas, Mal-Plus-Haus Forscherheft)

Rechengesetze

a) Beschreiben Sie die Veränderungen in den Aufgaben.
b) Erklären Sie, warum das Ergebnis immer 12 ist.
c) Wie könnte eine passende Darstellung mit Plättchen aussehen, die die Konstanz für Kinder verdeutlicht?

$$5 + 7 = 12$$
$$6 + 6 = 12$$
$$7 + 5 = 12$$
$$8 + 4 = 12$$

Rechengesetze

Konstanzgesetze

	Konstanzgesetz der …
Addition	$a + b = (a \pm c) + (b \mp c)$ *Gegensinnig verändern*
Subtraktion	$a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$ *Gleichsinnig verändern*
Multiplikation	$a \cdot b = (a \cdot c) \cdot (b : c)$ *Gegensinnig verändern*
Division	$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$ $a : b = (a : c) : (b : c)$ *Gleichsinnig verändern*

$$5 + 7 = 12$$
$$6 + 6 = 12$$
$$7 + 5 = 12$$
$$8 + 4 = 12$$

Rechengesetze

Rechengesetze

Im Schulbuch

2 Schöne Päckchen mit Minusaufgaben. Beschreibt und begründet.

a) 40 − 6
45 − 6
50 − 6

2 a)
40 − 6 = 34
45 − 6 = 39
50 − 6 = 44
+ 5 + 0

Metin

Ich rechne zur ersten Zahl immer 5 dazu. Die zweite Zahl bleibt gleich. Ich nehme also immer dieselbe Zahl weg. Was passiert mit dem Ergebnis?

b)	c)	d)	e)	f)
52 − 8	32 − 10	37 − 6	62 − 20	Findet ebenso ein schönes Päckchen.
54 − 8	32 − 12	42 − 11	60 − 18	
56 − 8	32 − 14	47 − 16	58 − 16	

(Zahlenbuch 2, S. 57)

2.4 Durch Dezimalzahlen dividieren

a) Rechne aus und erkläre deinen Rechenweg.

20 : 0,5 = ____________

b)

Kenan

Ich rechne beide Zahlen zuerst · 10,
dann kann ich statt 20 : 0,5 auch 200 : 5 rechnen.

Emily

Ich überlege mir: Wie oft passt die 0,5 in die 20?

Wie lösen Kenan und Emily die Aufgabe? Erkläre, was sie sich gedacht haben.

c) Rechne die folgenden Aufgaben.

(Mathe sicher können, D4B-5)

Fragen? Vielen Dank!

Literatur

- Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2021). *Lehrplan für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen. Fach Mathematik.* Abgerufen von https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/289/ps_lp_m_einzeldatei_2021_08_02.pdf [16.08.2021].

Internetlinks und Schulbücher

- Arithmetik digital (2024). *Konstanz der Summe*. Verfügbar unter: https://adi.dzlm.de/node/67
- Lara Sprenger & Stephan Hußmann (2023). *Mathe sicher können Diagnose- und Förderbausteine D4: Multiplizieren und Dividieren von Dezimalzahlen*. Open Educational Resources unter mathe-sicherkoennen. Verfügbar unter: dzlm.de/bpd/#D4
- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D., & Heß, B. (2022). *Das Zahlenbuch 2*. Ernst Klett Verlag.
- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D., & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 3*. Ernst Klett Verlag.
- Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2013). *Mathewerkstatt 6, Schulbuch [...]* ([Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg.], 1. Aufl.). Berlin: Cornelsen.
- PIKAS (o. J.). *Mal Plus Haus*. Verfübgar unter: https://pikas.dzlm.de/node/784