Fakultät Wirtschaftswissenschaften
TU Dortmund

Marvin Bongiovi, M.Sc.
marvin.bongiovi@tu-dortmund.de

Aufgabenblatt Ü13

Die Aufgaben sind den Lehrbüchern „Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL" von Wewel & Blatter [WB] und „Statistik" von Bamberg, Baur und Krapp [S-BBK] entnommen.

Aufgabe 3.3 [AS-BBK, S.84 Fortsetzung]

Für den Zustand der Fichten eines bestimmten Forstamtsbezirks werden die drei Schadensstufen 0 (=keine Schäden), 1 (= leichte bis mittlere Schäden) oder 2 (= schwere Schäden) als möglich angesetzt. Um die Anteile p_j der zur Schadensstufe j (mit $j = 0, 1, 2$) gehörenden Fichten zu schätzen, werden n Fichten zufällig ausgewählt und ihre Schadensstufen registriert. X_i bezeichne die Schadensstufe der i-ten Fichte, $i = 1, \dots, n$.

Die Schätzer $\hat{P}_1$ und $\hat{P}_2$ seien:

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2X_i - X_i^2)$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - X_i)$$

c) Definiere die Zufallsvariablen Y_i und Z_i durch

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i = 1 \\ 0 & \text{falls } X_i \neq 1 \end{cases} \quad \text{und } Z_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i = 2 \\ 0 & \text{falls } X_i \neq 2 \end{cases}$$

- Berechne $\mathbb{E}[\bar{Y}]$ und $\mathbb{E}[\bar{Z}]$.
- Gibt es Stichprobenrealisationen $(x_1, \dots, x_n)$, für die $\hat{P}_1$ bzw. $\hat{P}_2$ dasselbe Schätzergebnis liefert wie $\bar{Y}$ bzw. $\bar{Z}$?

Aufgabe 3.22 [AS-BBK, S.94]

Das Umweltreferat einer Großstadt will Aufschluss darüber gewinnen, wie viele Asbestfasern pro Kubikmeter Luft im Freien in ca. einem Meter Abstand von asbestzementhaltigen Gebäudeteilen zu erwarten sind. Bei $n = 14$ diesbezüglichen Messungen traten die Werte

980	1340	610	750	880	1250	2410
1100	470	1040	910	1860	730	820

auf, die als Ergebnisse unabhängiger normalverteilter Stichprobenvariablen angesehen werden.

a) Führe für den Erwartungswert μ der Anzahl X der unter den obigen Bedingungen vorhandenen Asbestfasern eine symmetrische (zweiseitige) Intervall-Schätzung zum Konfidenzniveau 0,95 durch.

b) Wie müsste das Konfidenzniveau gewählt sein, damit die Länge des entstehenden Schätzintervalls gleich 500 ist?

Aufgabe 9.2 [WB, S.279]

Bei der Produktion eines elektronischen Bauteils liegt die normale Ausschussquote bei 10%. In jüngster Zeit sind aber immer wieder technische Probleme aufgetreten, sodass sich die Produktionsleiterin nicht mehr sicher ist, ob die Anlage noch normal arbeitet. Im Rahmen der Qualitätssicherung werden deshalb regelmäßige Zufallsstichproben vom Umfang 100 entnommen, in denen jeweils die Ausschussquote festgestellt wird.

Vorüberlegungen:

- Welcher Verteilung liegt der Ausschuss eines einzelnen Bauteils zugrunde?
- Welche Verteilung hat dann die Ausschussquote?
- Falls der Parameter dieser Verteilung bekannt ist: Welchen Erwartungswert und welche Varianz hat dann diese Ausschussquote?

Hinweis:
Bei einem Stichprobenumfang von $n = 100$ kann hier die Verteilung der Ausschussquote durch die Normalverteilung approximiert werden.

a) Bestimme das 99%-Konfidenzintervall für den Anteil der defekten Bauteile in einer solchen Stichprobe unter der Annahme, dass die Produktionsanlage noch mit der normalen Ausschussquote arbeitet.

b) Formuliere Verbal die Aussage des Konfidenzintervalls.

c) In der neuen Stichprobe waren 15 Bauteile defekt. Bestimme das 99%-Konfidenzintervall für die aktuelle Ausschussquote in der Produktion.

Die Aufgaben dieser Seite sind für den zweiten Teil der Übung mit der Zielgruppe Lehramt.

Aufgabe 13 [HT 23/24 Fortsetzung]

Die Güteklasse X eines Elektrogeräts kann nach der Produktion als A-Ware ($X = 1$), B-Ware ($X = 2$) oder Ausschuss ($X = 3$) klassifiziert werden. Die Wahrscheinlichkeit A-Ware zu produzieren sei p_1, die Wahrscheinlichkeit B-Ware zu produzieren p_2 und die Wahrscheinlichkeit Ausschuss zu produzieren p_3, mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Es werde eine Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ gezogen, wobei alle $X_i, i = 1, \dots, n$ identisch zu X und unabhängig verteilt sind.

Welcher dieser Ausdrücke ist ein erwartungsgetreuer Schätzer für p_1?

a) $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 5X_i + 6)$

b) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2X_i)$

c) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2X_i - X_i^2)$

d) $X_1 - X_2$

Aufgabe 14 [NT 23/34]

Familie Tovolta möchte nun die in Aufgabe 9 erhobene Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_9$ benutzen, um den unbekannten Parameter μ zu schätzen.

Wieder sei bekannt, dass die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_9$ unabhängig und identisch verteilt sind mit Varianz $\sigma^2 = 256$.

Der Familie stehen nun vier Schätzer zur Verfügung:

- $\hat{\mu}_1 = X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 + 5X_5 - 6X_6 + 7X_7 - 8X_8 + 9X_9$
- $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{9} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9)$
- $\hat{\mu}_3 = X_1 - 2X_2$
- $\hat{\mu}_4 = \frac{1}{3} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9)$

Welcher dieser Schätzer ist erwartungstreu?

a) $\hat{\mu}_3$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_3] = \mu$ für alle μ.

b) $\hat{\mu}_1$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_1] = \mu$ für alle μ.

c) $\hat{\mu}_2$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_2] = \mu$ für alle μ.

d) $\hat{\mu}_4$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_4] = \mu$ für alle μ.

Aufgabe 10 [NT 23/24]

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1036$ und der Varianz $\sigma^2 = 81$. Diese Zufallsvariable werde nun neun mal unabhängig gezogen. Es bezeichne $\bar{X}$ den Durchschnitt dieser neun Ziehungen.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Durchschnitt höchstens 1042 beträgt?

Hinweis:
Auf der letzten Seite dieser Klausur finden Sie eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung.

a) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,5279$

b) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,7454$

c) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,9772$

d) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,5319$