Fakultät Wirtschaftswissenschaften
TU Dortmund

Marvin Bongiovi, M.Sc.
marvin.bongiovi@tu-dortmund.de

Aufgabenblatt Ü12

Die Aufgaben sind den Lehrbüchern „Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL" von Wewel & Blatter [WB] und „Statistik" von Bamberg, Baur und Krapp [S-BBK] entnommen.

Aufgabe 4 [#10.4 BBK, S.124]

Eine Vertriebsgesellschaft besitzt in einer Großstadt 200 Zigarettenautomaten. Jeder Automat hat (unabhängig von den anderen) mit der Wahrscheinlichkeit $1/20$ pro Woche eine Störung.

Für die Entscheidung über die Größe eines ständigen Reparaturtrupps sei die Wahrscheinlichkeit von Interesse, dass in einer Woche die Anzahl X der defekten Automaten zwischen 5 und 15 liegt. Diese Wahrscheinlichkeit (der exakte Wert beträgt übrigens 0,9292) soll

c) aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes approximativ berechnet werden.

Aufgabe 2 [#3.3 AS-BBK, S.84]

Für den Zustand der Fichten eines bestimmten Forstamtsbezirks werden die drei Schadensstufen 0 (=keine Schäden), 1 (= leichte bis mittlere Schäden) oder 2 (= schwere Schäden) als möglich angesetzt. Um die Anteile p_j der zur Schadensstufe j (mit $j = 0, 1, 2$) gehörenden Fichten zu schätzen, werden n Fichten zufällig ausgewählt und ihre Schadensstufen registriert. X_i bezeichne die Schadensstufe der i-ten Fichte, $i = 1, \ldots, n$.

a) Beachte die folgenden Schätzer $\hat{P}_1$ für p_1 und $\hat{P}_2$ für p_2:

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2X_i - X_i^2)$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - X_i)$$

Zeige:

- $\mathbb{E}[\hat{P}_1] = p_1$ für alle $p_1 \in [0, 1]$.
- $\mathbb{E}[\hat{P}_2] = p_2$ für alle $p_2 \in [0, 1]$.

b) Gebe eine erwartungstreue Schätzfunktion für p_0 an.

c) Definiere die Zufallsvariablen Y_i und Z_i durch

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i = 1 \\ 0 & \text{falls } X_i \neq 1 \end{cases} \text{ und } Z_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i = 2 \\ 0 & \text{falls } X_i \neq 2 \end{cases}$$

- Berechne $\mathbb{E}[\bar{Y}]$ und $\mathbb{E}[\bar{Z}]$.
- Gibt es Stichprobenrealisationen $(x_1, \ldots, x_n)$, für die $\hat{P}_1$ bzw. $\hat{P}_2$ dasselbe Schätzergebnis liefert wie $\bar{Y}$ bzw. $\bar{Z}$?

Die Aufgaben dieser Seite sind für den zweiten Teil der Übung mit der Zielgruppe Lehramt.

Aufgabe 4

Es sei wieder $X \sim \mathcal{U}(2,4)$. Die Zufallsvariable Z sei definiert durch $Z = \frac{1}{2}X - 1$.

Gebe die Randverteilung $F_Z(z)$ an. Ist Z gleichverteilt? Gebe zusätzlich die gemeinsame Verteilung $F_{XZ}(x,z)$ an und berechne damit folgende Wahrscheinlichkeiten:

- $\mathbb{P}(Z \geq \frac{1}{2})$
- $\mathbb{P}(X \leq 3, Z \geq \frac{1}{2})$
- $\mathbb{P}(X \leq 3 | Z \geq \frac{1}{2})$

Berechne nun die folgenden Erwartungswerte:

- $\mathbb{E}[Z | Z \geq \frac{1}{2}]$
- $\mathbb{E}[X | Z \geq \frac{1}{2}]$
- $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Z - \mathbb{E}[Z])\right]$

Aufgabe 13 [HT 23/24]

Die Güteklasse X eines Elektrogeräts kann nach der Produktion als A-Ware ($X = 1$), B-Ware ($X = 2$) oder Ausschuss ($X = 3$) klassifiziert werden. Die Wahrscheinlichkeit A-Ware zu produzieren sei p_1, die Wahrscheinlichkeit B-Ware zu produzieren p_2 und die Wahrscheinlichkeit Ausschuss zu produzieren p_3, mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Es werde eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ gezogen, wobei alle $X_i, i = 1, \ldots, n$ identisch zu X und unabhängig verteilt sind.

Welcher dieser Ausdrücke ist ein erwartungsgetreuer Schätzer für p_1?

a) $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 5X_i + 6)$

b) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2X_i)$

c) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2X_i - X_i^2)$

d) $X_1 - X_2$

Aufgabe 14 [NT 23/34]

Familie Tovolta möchte nun die in Aufgabe 9 erhobene Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_9$ benutzen, um den unbekannten Parameter μ zu schätzen.

Wieder sei bekannt, dass die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_9$ unabhängig und identisch verteilt sind mit Varianz $\sigma^2 = 256$.

Der Familie stehen nun vier Schätzer zur Verfügung:

- $\hat{\mu}_1 = X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 + 5X_5 - 6X_6 + 7X_7 - 8X_8 + 9X_9$
- $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9)$
- $\hat{\mu}_3 = X_1 - 2X_2$
- $\hat{\mu}_4 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9)$

Welcher dieser Schätzer ist erwartungstreu?

a) $\hat{\mu}_3$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_3] = \mu$ für alle μ.

b) $\hat{\mu}_1$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_1] = \mu$ für alle μ.

c) $\hat{\mu}_2$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_2] = \mu$ für alle μ.

d) $\hat{\mu}_4$ ist erwartungstreu, es gilt $\mathbb{E}[\hat{\mu}_4] = \mu$ für alle μ.