

Aufgabenblatt Ü08

Die Aufgaben sind den Lehrbüchern „Statistik im Bachelor-Studium der BWL und VWL“ von Wewel & Blatter [WB] und „Statistik“ von Bamberg, Baur und Krapp [S-BBK] entnommen.

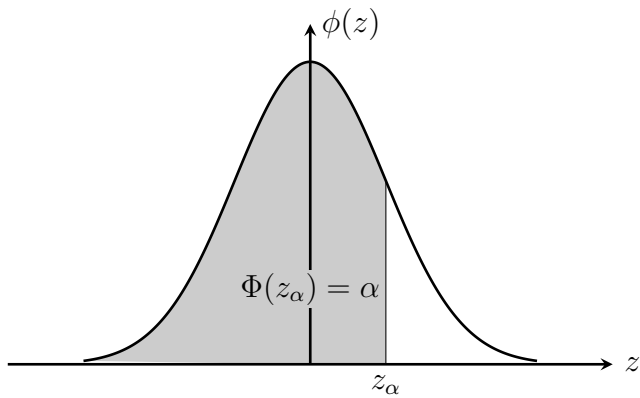
Aufgabe 2

Betrachte die normalverteilten Zufallsvariablen $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $X \sim \mathcal{N}(100, 225)$ und $Y \sim \mathcal{N}(3, 4)$. Benutze die Tabelle der Standardnormalverteilung um die folgenden Werte zu bestimmen. Dabei bezeichne Φ wie gewohnt die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Beachte, dass Du X und Y zunächst standardisieren musst, bevor Du die Tabelle benutzen darfst.

- a) $\Phi(1) = ?$
- b) $\Phi(1.08) = ?$
- c) $\Phi(?) \approx 0.2$
- d) $\mathbb{P}(Z > \frac{3}{4}) = ?$
- e) $\mathbb{P}(Z \leq -\frac{3}{4}) = ?$
- f) $\mathbb{P}(-1.96 > Z) = ?$
- g) $\mathbb{P}(X \leq ?) = 0,9901$
- h) $\mathbb{P}(X \leq 82) = ?$
- i) $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq ?) = 0,5$
- j) $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 2, -1 \leq Z \leq 1) = ?$
wobei Y und Z unabhängig seien.

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Hinweis zur Benutzung dieser Tabelle:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als $x+y$, ist in der Zeile x und Spalte y abzulesen. Zum Beispiel gilt: $\mathbb{P}(Z \leq 1,5+0,06) = \Phi(1,56) = 0,9406$, also 94,06%.

Aufgabe 6.6 [WB S.198]

An einer innerstädtischen Hauptverkehrsstraße ist ein stationäres Blitzgerät zur Geschwindigkeitsüberwachung installiert, das grundsätzlich alle Fahrzeuge blitzt, die die erlaubte Höchstgeschwindigkeit überschreiten. Erfahrungsgemäß wird diese von 10% der Fahrzeuge um bis zu 10 km/h (15 Euro Bußgeld), von 4% um 11 bis 15 km/h (25 Euro Bußgeld), von 3% um 16 bis 20 km/h (35 Euro Bußgeld), von 2% um 21 bis 25 km/h (50 Euro Bußgeld) und von 1% der Fahrzeuge um 26 bis 30 km/h (60 Euro Bußgeld) überschritten.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an dieser Stelle ...
- ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug die erlaubte Höchstgeschwindigkeit einhält?
 - ein Fahrzeug, das geblitzt wird, höchstens 15 km/h zu schnell gefahren ist?
 - ein Fahrer, der geblitzt wird, mindestens 50 Euro Bußgeld bezahlen muss?
- b) Pro Blitzvorgang und anschließendem Bußgeldverfahren entstehen der Stadt Kosten von 20 Euro. Bestimme den Wertebereich der Zufallsvariablen X "Gewinn der Stadt bei einem Blitzvorgang"!
- c) Erstelle für die Zufallsvariable X eine Wertetabelle der Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion!

Die Aufgaben dieser Seite sind für den zweiten Teil der Übung mit der Zielgruppe Lehramt.

Aufgabe 8 [HT 22/23]

Es sei die Zufallsvariable X gleichverteilt auf dem Intervall $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

Für welches $x_{4/5}$ gilt $\mathbb{P}(X \leq x_{4/5}) = \frac{4}{5}$? Berechnen Sie für $\alpha = \frac{4}{5}$ das α -Quantil $x_{4/5}$!

a) $x_{4/5} = \frac{2}{5}$

b) $x_{4/5} = \frac{1}{5}$

c) $x_{4/5} = \frac{4}{5}$

d) $x_{4/5} = \frac{3}{5}$

Aufgabe 9 [HT 22/23]

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = -3$ und Varianz $\sigma^2 = 9$.

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \leq 0)$!

a) $\mathbb{P}(X \leq 0) \approx 84\%$

b) $\mathbb{P}(X \leq 0) \approx 0,8413\%$

c) $\mathbb{P}(X \leq 0) \approx 50\%$

d) $\mathbb{P}(X \leq 0) \approx 16\%$

Aufgabe 9 [HT 23/24]

Die Bäuerin Elfriede produziert Kartoffeln, deren Gewicht unabhängig und identisch normalverteilt mit $\mu = 100$ (g) und $\sigma^2 = 25$ sei. Eine Kartoffel wird der höchsten Gewichtsklasse zugeordnet, wenn sie mehr als 105 g wiegt.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Elfriede eine Kartoffel erntet, die nicht die höchste Gewichtsklasse aufweist?

Hinweis:

Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

a) $\approx 84,1\%$

b) $\approx 17,8\%$

c) $\approx 0\%$

d) $\approx 15,9\%$

Aufgabe 7 [NT 22/23]

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Wie lautet die Dichtefunktion von X ?

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \mathbb{E}[X] = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$