Fakultät Wirtschaftswissenschaften
TU Dortmund

Dr. Lars Metzger
mathe.wiwi@tu-dortmund.de

# Aufgabenblatt T14

## Aufgabe 1

Gegeben seien die Körpergewichte von 10 Personen in kg:

$$95, 83, 59, 70, 61, 83, 54, 72, 63, 85$$

Es wird angenommen, dass das Körpergewicht mithilfe einer Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 169(kg)^2$ modelliert werden kann und dass die einzelnen Körpergewichte unabhängig voneinander sind.

a) Bestimme die Grenzen eines symmetrischen Konfidenzintervalls für den Erwartungswert $\mu$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$.

b) Bestimme ein *asymmetrisches* 95%-Konfidenzintervall der Form $[V_U; V_O]$ für den Erwartungswert, sodass $\mathbb{P}(\mu < V_U) = 0{,}02$ und $\mathbb{P}(\mu > V_O) = 0{,}03$ gilt. Ist das Intervall länger oder kürzer als das Intervall in Aufgabenteil b)?

Es sei nun die Varianz $\sigma^2$ als unbekannt vorausgesetzt.

c) Schätze die Varianz erwartungstreu aus der oben angegebenen Stichprobe.

## Aufgabe 2

Wir betrachten die Gesamtzahl der von jeweils beiden Mannschaften erzielten Tore in den letzten 10 Spielen der Handball WM:

$$45\ 53\ 60\ 52\ 46\ 59\ 45\ 50\ 61\ 60$$

Nehme an, dass die Gesamtzahl der Tore der einzelnen Spiele unabhängig identisch normalverteilt sind.

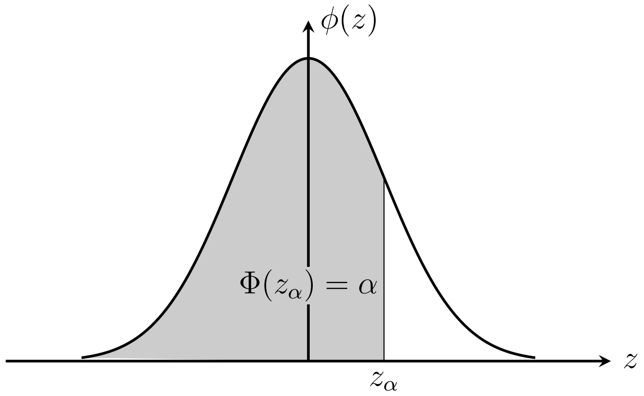
a) Bestimme ein symmetrisches 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Gesamtzahl der Tore.

b) Du beobachtest fünf Spiele und erhältst für $\bar{x}$ sowie $s^2$ dieselben Werte wie in Aufgabenteil a) berechnet. Ändert sich dadurch das Konfidenzintervall gegenüber dem Konfidenzintervall aus Aufgabenteil a)?

c) Wie verändert sich das Konfidenzintervall aus Aufgabenteil a), wenn bekannt ist, dass die tatsächliche Varianz der Gesamtzahl der Tore mit dem errechnetem Wert $s^2$ übereinstimmt?

d) Nehme an, dass die Varianz der Gesamtzahl der Tore wie in Aufgabenteil c) gegeben ist, sowie zusätzlich auch der Erwartungswert der Gesamtzahl der Tore bekannt ist und den Wert $55$ annimmt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel $\bar{X}$ der Gesamtzahl der Tore aus 10 betrachteten unabhängigen Spielen im berechneten Konfidenzintervall aus Aufgabenteil c) liegt.

## Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$




| z | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,5000 | 0,504 | 0,508 | 0,512 | 0,516 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |

*Hinweis zur Benutzung dieser Tabelle*:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $Z$ einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als $x+y$, ist in der Zeile $x$ und Spalte $y$ abzulesen. Zum Beispiel gilt: $\mathbb{P}(Z \leq 1,5+0,06) = \Phi(1,56) = 0,9406$, also 94,06%.

Für Wahrscheinlichkeiten $\alpha < 0,5$ kann $z_\alpha = 1 - z_{1-\alpha}$ benutzt werden.

## Kritische Werte der $t$-Verteilung

| | | Signifikanzniveau | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | einseitig: | 10% | 5% | 2,5% | 1% | 0,5% |
| | zweiseitig: | 20% | 10% | 5% | 2% | 1% |
| Freiheits- | 1 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 |
| grade | 2 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 |
| | 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| | 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| | 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| | 6 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 |
| | 7 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 |
| | 8 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 |
| | 9 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 |
| | 10 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 |
| | 11 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 |
| | 12 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 |
| | 13 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 |
| | 14 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 |
| | 15 | 1,341 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 |
| | 16 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 |
| | 17 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 |
| | 18 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 |
| | 19 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 |
| | 20 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 |
| | 21 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 |
| | 22 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 |
| | 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |
| | 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 |
| | 25 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 |
| | 26 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 |
| | 27 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 |
| | 28 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 |
| | 29 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 |
| | 30 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 |
| | 40 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 |
| | 60 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 |
| | 90 | 1,291 | 1,662 | 1,987 | 2,368 | 2,632 |
| | 120 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 |
| | $\infty$ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 |

*Hinweise zur Nutzung dieser Tabelle*:
Es sei $T$ eine Zufallsvariable, welche $t$-verteilt ist mit $n$ Freiheitsgraden.
*Einseitig*: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(T \leq t_{(n,1-\alpha)}) = 1 - \alpha = \mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha)} \leq T)$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile $n$ und in der Spalte, welche unter „einseitig“ das Signifikanzniveau $\alpha$ angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 22$ und $t_{(22,1-1\%)} = 2,508$, dass $\mathbb{P}(T \leq 2,508) = 1 - 1\% = 99\%$.
*Zweiseitig*: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha/2)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha/2)} \leq T \leq t_{(n,1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile $n$ und in der Spalte, welche unter „zweiseitig“ das Signifikanzniveau $\alpha$ angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 5\%$, $n = 17$ und $t_{(17,1-2.5\%)} = 2,110$, dass $\mathbb{P}(-2,110 \leq T \leq 2,110) = 1 - 5\% = 95\%$.