
Aufgabenblatt T13

Aufgabe 1

Von der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) ist bekannt:

- X hat den Wertebereich $\{0, 4\}$ und es gilt $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{5}$.
 - Y hat den Wertebereich $\{-2, 0, 2\}$ und es gilt $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(Y = -2) = \frac{3}{10}$.
 - $\mathbb{P}(X = 0, Y = -2) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{5}$.
- a) Erstelle zu (X, y) die Tabelle der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ mit den Randwahrscheinlichkeiten $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ und $f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y)$.
 - b) Berechne $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$.
 - c) Berechne die Kovarianz $\text{cov}(X, Y)$ und die Korrelation $\text{corr}(X, Y)$.
 - d) Sind X und Y unabhängig?
 - e) Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > Y)$.
 - f) Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > Y | Y = 2)$.

Aufgabe 2

Sei F eine Verteilung mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Betrachte die unabhängigen, gemäß F verteilten Zufallsvariablen X_1 und X_2 und die Klasse von Schätzfunktionen

$$T(a) := aX_1 + (1 - a)X_2$$

für den Parameter μ , mit $a \in \mathbb{R}$.

- a) Gegeben seien die Realisationen $x_1 = 3.1$ und $x_2 = 1.8$ von X_1 und X_2 . Bestimme die Realisationen der Schätzer $T(1)$ und $T(2)$.
- b) Berechne jeweils für $a = 0, \frac{1}{2}$ und 2 den Erwartungswert und die Varianz des Schätzers.
- c) Zeige, dass der Schätzer $T(a)$ unabhängig von der Wahl der Konstanten a erwartungstreu für den Parameter μ ist.
- d) Berechne die Varianz $\text{var}(T(a))$ in Abhängigkeit der Konstanten a .
- e) Für welche Wahl der Konstanten a ist die Varianz minimal? Ist die Lösung des Minimierungsproblems eindeutig? Wie sieht somit der effiziente Schätzer in dieser Klasse aus?