
Aufgabenblatt T10

Aufgabe 1

Dir wird folgendes Glücksspiel mit einem Einsatz von $x \text{ €}$ vorgeschlagen: Nach einem einmaligen Wurf eines fairen Würfels erhältst du die gewürfelte Augensumme in Euro. Zu betrachten ist die Zufallsvariable $X = \text{„erhaltene Augensumme minus } x\text{“}$.

- Bestimme die Höhe des Einsatzes so, dass das vorgeschlagene Spiel ein *fares* Spiel ist, das heißt, dass der Erwartungswert von X bei 0 Euro liegt.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit eines Gewinnes von mehr als einem Euro, also $\mathbb{P}(X > 1)$, in einem fairen Spiel.
- Bestimme die Varianz von X in Abhängigkeit des Einsatzes x .

Betrachte nun ein zweites Spiel. Nach dem Zahlen eines Einsatzes von 30€ und eines einmaligen Wurfes eines fairen Würfels erhältst du nun das dreifache des Quadrates der gewürfelten Augensumme in Euro. Du betrachtest hierzu die Zufallsvariable Y .

- Berechne den Erwartungswert von Y . Würdest Du an dem Spiel teilnehmen?
- Berechne die Varianz von Y .
- Nehme an, der Einsatz y für das zweite Spiel ist so gewählt, dass es sich um ein fares Spiel handelt. Welches Spiel würdest Du bevorzugen? Begründe Deine Auswahl.

Aufgabe 2

Bei 1000 Personen soll ein Coronatest durchgeführt werden. Dies kann auf zwei Arten geschehen:

- Jede Person wird einzeln getestet. In diesem Fall sind 1000 Tests notwendig.
- Die Proben von 10 Personen werden vermischt und zusammen analysiert. Ist der Test negativ, genügt ein Test für alle 10 Personen zusammen. Fällt der Test positiv aus, muss jede der 10 Personen einzeln untersucht werden, so dass zusammen 11 Tests für 10 Personen notwendig sind.

Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit 1% für ein positives Testergebnis für alle Personen gleich ist und dass die Untersuchungsergebnisse der einzelnen Personen stochastisch unabhängig sind.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test für die gepoolte Probe von 10 Personen positiv ausfällt?
- Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl von Tests, die nach Verfahren II notwendig sind?
- Wie lautet der Erwartungswert allgemein, wenn insgesamt $n \cdot k$ Personen in n Gruppen von je k Personen zusammengefasst werden, und die Wahrscheinlichkeit für ein positives Ergebnis $p > 0$ beträgt? (In a) und b) galt $n = 100$, $k = 10$ und $p = \frac{1}{100}$.)