Teil 3

Inferenzstatistik

Moodle

Lehrbuch

Teil 3: Inferenzstatistik

Teil 3: Inferenzstatistik

Lernziele

- Entwicklung eines Verständnisses für die Methodik der Punkt- und Intervallschätzung.
- Erwerb der Fähigkeit zum formal und logisch korrekten statistischen Testen.
- Verständnis des Begriffs des „Fehlers“ im statistischen Sinne.
- Fähigkeit zur Beurteilung der Güte statistischer Tests.

Kapitel 11: Grundlagen der induktiven Statistik

Grundbegriffe

- **Grundgesamtheit G:**
  Menge aller für eine statistische Untersuchung relevanten Merkmalsträger

- **(reine) Zufallsauswahl:**
  Jedes Element hat die gleiche Chance, ausgewählt zu werden

- **Verteilung F von G bezüglich Merkmal X:**
  Wahrscheinlichkeit, dass für einen zufälligen Merkmalsträger von G das Merkmal $X \leq x$ ist, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
  $\rightarrow$ **Erwartungswert** und **Varianz** der Grundgesamtheit
  - Verteilung unbekannt
  - Verteilung teilweise unbekannt (lediglich $\mathbb{E}$ und *Var* unbekannt)

Stichprobenerhebung

- Auswahl endlich vieler Merkmalsträger aus G
- **Stichprobenumfang** n
- **Stichprobenvariablen** X_i, $i = 1, \ldots, n$
- **Beobachtungswert** x_i: Realisierung von X_i, $i = 1 \ldots n$
- **unabhängig und identisch verteilt (iid):** Merkmalsträger werden gemäß reiner Zufallsauswahl unabhängig aus G entnommen.
- **Mehrdimensionale Stichprobe:** Von jedem Merkmalsträger werden die Ausprägungen mehrerer Merkmale erhoben

Stichprobenraum und Stichprobenfunktion

- **Stichprobenergebnis oder -realisation:** $(x_1, \ldots, x_n)$
- **Stichprobenraum:**
  Menge aller möglichen Realisationen
- Falls Verteilung F bekannt, aber deren Parameter ν unbekannt: **Likelihood-Funktion**

$$f(x_1, \ldots, x_n | \nu)$$

- **Stichprobenfunktion** oder **Statistik:**
  Zufallsvariable V als Funktion der Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$:

$$V = g(X_1, \ldots, X_n)$$

Beispiele für Stichprobenfunktionen

Seien die Stichprobenvariablen X_i identisch und unabhängig verteilt („iid“) mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$.

- Stichprobenmittel: $\bar{X}$
- mittlere quadratische Abweichung bezüglich μ: $M^2(\mu)$
- mittlere quadratische Abweichung: M^2
- Stichprobenvarianz: S^2
- Gauß-Statistik: G
- t-Statistik: T

Stichprobenmittel $\bar{X}$

X_i iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Erwartungswert:

$\mathbb{E}[\bar{X}] =$

Varianz:

$Var(\bar{X}) =$

mittlere quadratische Abweichung bezüglich μ: $M^2(\mu)$

X_i iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$

$$M^2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

Erwartungswert:

$\mathbb{E}\left[M^2(\mu)\right] =$

Mittlere quadratische Abweichung M^2

X_i iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$

$$M^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Erwartungswert:

$\mathbb{E}\left[M^2\right] =$

Stichprobenvarianz S^2

X_i iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Erwartungswert:

$\mathbb{E}\left[S^2\right] =$

Gaußstatistik G

X_i iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$

$$G = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Erwartungswert:

$\mathbb{E}\left[G\right] =$

Varianz:

$Var\left(G\right) =$

t-statistik T

X_i iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}$$

Erwartungswert:

$\mathbb{E}\left[T\right] = 0$

Um zu berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Wert der Stichprobenfunktion eine bestimmte Zahl nicht überschreitet, müssen wir die Verteilung der Stichprobenfunktion kennen.

Eine Verteilung kennen wir bereits: die **Normalverteilung**

Aus dieser Verteilung können wir einige anderen Verteilungen herleiten:

- die Chi^2-Verteilung
- die t-Verteilung
- die F-Verteilung

Testverteilungen

- **χ^2-Verteilung**

  Sind $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, so ist $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$, „Chi-Quadrat-verteilt mit n Freiheitsgraden".
  Es gilt $\mathbb{E}[Z] = n$ und $Var(Z) = 2n$.

- ***t*-Verteilung**

  Ist $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängig von $Z \sim \chi^2(n)$, so ist $T = \frac{X}{\sqrt{Z/n}} \sim t(n)$, „$t$-verteilt mit n Freiheitsgraden".
  Es gilt $\mathbb{E}[T] = 0$ und $Var(T) = \frac{n}{n-2}$.

- ***F*-Verteilung**

  Ist $X \sim \chi^2(n_1)$ unabhängig von $Y \sim \chi^2(n_2)$, so ist $Z = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_2, n_1)$, „$F$-verteilt mit n_2 und n_1 Freiheitsgraden".

Verteilungen von Stichprobenfunktionen

mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$

Stichprobenfunktion	Verteilung
$\bar{X}$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
$\frac{n}{\sigma^2} M^2(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$	$\chi^2(n)$
$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	$\chi^2(n-1)$
$G = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$	$\mathcal{N}(0, 1)$
$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}$	$t(n-1)$

Kapitel 12: Punktschätzung

Punktschätzung

Parametrische Statistik

Die **Verteilung** F der Grundgesamtheit G bezüglich eines Merkmals X sei bekannt.

Die **Parameter** θ dieser Verteilung seien aber unbekannt.

Beispiele

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ und σ^2 sind aber unbekannt.

Die Zufallsvariable Y sei binomialverteilt, $Y \sim B(n, p)$, p sei aber unbekannt.

Schätzfunktion

Wir schätzen den Wert eines unbekannten Parameters θ aus der Menge aller möglichen Parameterwerte Θ mit einer Stichprobenfunktion $\hat{\theta}$, die wir **Schätzfunktion** oder **Schätzer** nennen:

$$\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \to \Theta$$

Der Schätzer $\hat{\theta}$ ist als Funktion von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ wieder eine Zufallsvariable.

Der **Schätzwert** $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet den Funktionswert von $\hat{\theta}$ für eine gegebene Realisierung $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Eigenschaften von Schätzfunktionen

Wir werden folgende Eigenschaften definieren:

- **Erwartungstreue**
  Erwartungstreue Schätzer schätzen den wahren Parameter „im Mittel“ richtig.
- **Effizienz** (Buch: „Wirksamkeit“)
  Effiziente Schätzer streuen innerhalb der erwartungstreuen Schätzer am wenigsten.
- **Konsistenz** (nicht relevant für die Klausur)
  Für sehr große Stichproben verschwindet die Wahrscheinlichkeit, dass der Schätzwert vom geschätzten Parameter abweicht.

Die Untersuchung dieser Eigenschaften ist unter der iid-Annahme wesentlich leichter.

Erwartungstreuer Schätzer

Definition:

Sei θ ein unbekannter Parameter mit möglichen Werten in Θ und sei $\hat{\theta}$ eine Schätzfunktion für θ, dann heißt $\hat{\theta}$ **unverzerrt** oder **erwartungstreu** für θ, wenn

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\right] = \theta \text{ für alle } \theta \in \Theta$$

Andernfalls, also falls $\mathbb{E}\left[\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\right] \neq \theta$ für mindestens ein $\theta \in \Theta$, heißt der Schätzer $\hat{\theta}$ **verzerrt**.

Verkürzend schreiben wir in Zukunft $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$ anstelle von $\mathbb{E}\left[\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\right]$.

Beispiel Erwartungstreue

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

Die unbekannten Parameter sind also μ und σ^2.

Ein Schätzer für μ könnte lauten:

$$\hat{\mu}_1(X_1, \ldots, X_n) = \frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_n$$

Der Erwartungswert dieses Schätzers ist:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_1] =$$

Der Schätzer $\hat{\mu}_1$ ist also:

Beispiel Erwartungstreue (Fortsetzung)

Ein anderer Schätzer für μ könnte allgemein eine beliebige lineare Funktion von $X_1, \ldots, X_n$ sein:

$$\hat{\mu}_{\text{linear}}(X_1, \ldots, X_n) = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + \ldots + a_n \cdot X_n \ ,$$

wobei $a_1, a_2 \ldots, a_n$ beliebige Zahlen sind.

Der Erwartungswert dieses Schätzers lautet:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}_{\text{linear}}] =$$

Der Schätzer $\hat{\mu}_{\text{linear}}$ ist also:

Effizienter Schätzer

Definition

Der Schätzer $\hat{\theta}$ für θ ist **effizient** falls

$$Var(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)) \leq Var(\tilde{\theta}(X_1, \ldots, X_n))$$

für alle erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}$.

Verkürzend schreiben wir in Zukunft $Var(\hat{\theta})$ anstelle von $Var(\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n))$.

Anmerkung

Es kann durchaus verzerrte Schätzer geben, welche eine geringere Varianz aufweisen als der effiziente Schätzer!

Beispiel Effizienz

Betrachtet werden wieder $X_1, \ldots, X_n$ iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$.

Mit $a_1 = \frac{3}{4}, a_n = \frac{1}{4}$ und $a_i = 0$ für $i = 2, \ldots, n-1$ ist $\hat{\mu}_1$ ein Spezialfall von $\hat{\mu}_{\text{linear}}$.

Da die X_i unabhängig sind, gilt:

$$Var\left(\hat{\mu}_{\text{linear}}\right) =$$

Für welche a_i, $i = 1, \ldots, n$ ist die Varianz minimal?

Konsistenter Schätzer

Definition:

Sei θ ein unbekannter Parameter mit möglichen Werten in Θ und sei $\hat{\theta}_n$ eine Schätzfunktion für θ, dann heißt $\hat{\theta}$ **konsistent** für θ, falls für alle $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n) - \theta| > \epsilon\right) = 0$$

Bemerkung:

Konsistenz wird nicht durch Erwartungstreue impliziert (z.B. $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n) = X_1$ für μ) und impliziert nicht Erwartungstreue (z.B. mittlere quadratische Abweichung für σ^2).

Konsistenz: Beispiel $\bar{X}$

Seien $X_1, \dots, X_n$ iid mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$.

Dann gilt für $\bar{X}_n$ als Schätzer für μ mit der Ungleichung von Tschebyscheff:

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]| \geq c\right) \leq \frac{Var(\bar{X}_n)}{c^2} \ \forall \ c > 0$$

Bereits hergeleitet:

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu \text{ und } Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$$

Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| \geq c\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sigma^2}{c^2} = 0 \ \forall \ c > 0$$

Der Schätzer $\bar{X}_n$ ist also konsistent für μ.

Gebräuchliche Schätzfunktionen

- **Kleinste Quadrate Schätzer** $\hat{\theta}^{LS}$
  Der Schätzer $\hat{\theta}^{LS}$ minimiert die Summe der quadratischen Abweichung der Beobachtungen x_i zu $\hat{\theta}^{LS}$.
- **Maximum Likelihood Schätzer** $\hat{\theta}^{ML}$
  Der Schätzer $\hat{\theta}^{ML}$ maximiert die Wahrscheinlichkeit bzw. Dichte $f(x_1, \dots, x_n|\hat{\theta}^{ML})$, dass die Stichprobe $(x_1, \dots, x_n)$ auftritt.
- **Bayes Schätzer** $\hat{\theta}^{B}$
  Gegeben sei eine a-priori-Dichte $\phi(\theta)$. Der Schätzer $\hat{\theta}^{B}$ maximiert die A-posteriori-Dichte $\psi(\hat{\theta}^{B}|x_1, \dots, x_n)$.

Kapitel 13: Intervall-Schätzung

Intervallschätzer

Bisher: Punktschätzer

Schätzt den Wert eines unbekannten Parameters bei bekannter Verteilung.

Der Schätzer hängt von der Stichprobe ab und ist deshalb eine Zufallsvariable mit Erwartungswert und Varianz.

Wie genau ist der Schätzer?

Nun: Intervallschätzer

Schätzt ein Intervall, welches den unbekannten Parameter mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit umschließt.

Die Schätzer für die Intervallgrenzen hängen ebenfalls von der Stichprobe ab und sind somit Zufallsvariablen.

n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen X_i

Annahmen (zunächst):

- Die Merkmalsausprägungen X_i der n Merkmalsträger sind unabhängig und identisch verteilt gemäß F.
- Die Verteilung F ist die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei
  - $\mu = \mathbb{E}[X_i], i = 1, \ldots, n$ unbekannt und
  - $\sigma^2 = Var(X_i), i = 1, \ldots, n$ bekannt.

Wir werden später die Methodik beschreiben,

- wenn auch σ^2 unbekannt ist und
- wenn die Verteilung F unbekannt ist.

Definition Konfidenzintervall für unbekannten Parameter θ

Ein Intervall der Form $[V_u, V_o]$, mit

$$V_u = g(X_1, \dots, X_n) \leq V_o = h(X_1, \dots, X_n)$$

heißt **Konfindenzintervall** zum Niveau $1 - \alpha$, falls gilt:

$$\mathbb{P}(V_u \leq \theta \leq V_o) = 1 - \alpha$$

- Wahrscheinlichkeit α: **Irrtumswahrscheinlichkeit**
- Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$: **Vertrauenswahrscheinlichkeit**

Das Konfidenzintervall $[V_u, V_o]$ heißt **symmetrisch**, falls:

$$\mathbb{P}(\theta < V_u) = \mathbb{P}(V_o < \theta) = \frac{\alpha}{2}$$

Einseitiges Konfidenzintervall für μ bei bek. Varianz σ^2

$$\left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma^2/n}\right]$$

Bemerkungen:

- $z_{1-\alpha}$ ist das $(1-\alpha)$-Quantil einer standardnormal verteilten Zufallsvariable: Ist $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, so gilt $\mathbb{P}(Z < z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$. Es gilt außerdem $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$ (Symmetrie).
- Für $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gilt: $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$ und $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

Einseitiges Konfidenzintervall für μ bei bek. Varianz σ^2

Die obere Intervallgrenze V_o ist eine Linearkombination normalverteilter Zufallsvariablen und deswegen ebenfalls normalverteilt.

Es folgt:

$$\mathbb{P}\left(\frac{V_o - \mathbb{E}[V_o]}{\sqrt{Var(V_o)}} < z_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(V_o < \mathbb{E}[V_o] + z_\alpha\sqrt{Var(V_o)}\right) = \alpha$$

Mit $\mathbb{E}[V_o] = \mu + z_{1-\alpha}\sqrt{Var(V_o)}$ und $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ folgt:

$$\mathbb{P}\left(V_0 < \mu\right) = \alpha$$

Mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-\alpha$ umschließt das Intervall $(-\infty, V_o]$ also den unbekannten Parameter μ.

Einseitiges Konfidenzintervall für μ bei bek. Varianz σ^2

$$\left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma^2/n}\right]$$

Bemerkungen:

- Zur Berechnung von $\bar{X}$ fließen alle Beobachtungen mit gleichem Gewicht ein.
- $z_{1-\alpha}$ kann der Tabelle der Normalverteilung entnommen werden:
  - $\alpha = 10\% : \; z_{0,90} = 1,28$
  - $\alpha = \;\; 5\% : \; z_{0,95} = 1,77$
  - $\alpha = \;\; 1\% : \; z_{0,99} = 2,33$
- Das Intervall wird bei gegebenem $\bar{X}$ kürzer, falls
  - die Irtumswahrscheinlichkeit α steigt,
  - die Varianz σ^2 sinkt,
  - die Stichprobengröße n steigt.

Einseitiges Konfidenzintervall für μ bei bek. Varianz σ^2

$$\left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma^2/n}\right]$$

1. Lege das Vertrauensniveau $1-\alpha$ fest.
2. Berechne das arithmetische Mittel $\bar{X}$.
3. Bestimme das $(1-\alpha)$-Quantil $z_{1-\alpha}$ der $\mathcal{N}(0,1)$-Verteilung.
4. Berechne $z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\sigma^2/n}$.

Interpretation:

Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α ist die obere Intervallgrenze kleiner als der wahre Parameter μ.

Mit der Vertrauenswahrscheinlichkeit $1-\alpha$ enthält das Intervall den wahren Parameter μ.

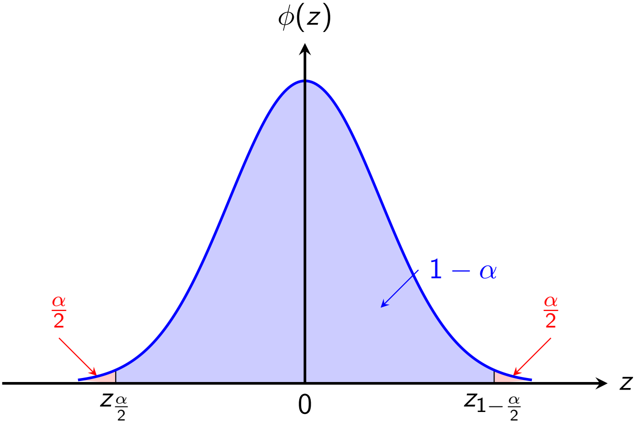
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei bek. Varianz σ^2

$$\left[\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}\right]$$

Bemerkungen:

- Aufgrund der Symmetrie von ϕ gilt $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.
- Die Irrtumswahrscheinlichkeit α lässt die Irrtümer $V_u > \mu$ und $V_o < \mu$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{\alpha}{2}$ zu.
- Die Zufälligen Intervallgrenzen umschließen den unbekannten Parameter μ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$.

Graphische Bestimmung der Quantile $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$



Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei bek. Varianz σ^2

$$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}\right]$$

1. Lege das Konfidenzniveau $1 - \alpha$ fest.
2. Berechne das arithmetische Mittel $\bar{X}$.
3. Bestimme $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, das $(1 - \alpha/2)$-Quantil der $\mathcal{N}(0, 1)$-Verteilung.
4. Berechne $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}$.

Die Länge beträgt $2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}$ und wird kürzer, falls

- die Irtumswahrscheinlichkeit α steigt,
- die Varianz σ^2 sinkt,
- die Stichprobengröße n steigt.

Konfidenzintervalle für μ bei unbekannter Varianz σ^2

Ist die Varianz $Var(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, \ldots, n$ unbekannt, so führt dies zu zwei Problemen.

Problem 1:

Der Parameter σ^2 fließt in die Berechnung der Intervallgrenzen $V_{u/o} = \bar{X} \pm z\sqrt{\sigma^2/n}$ ein. Diese können nicht mehr berechnet werden.

Lösung:

Schätze σ^2 erwartungstreu durch $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

Konfidenzintervalle für μ bei unbekannter Varianz σ^2

Ersetze σ^2 in den Formeln durch S^2.

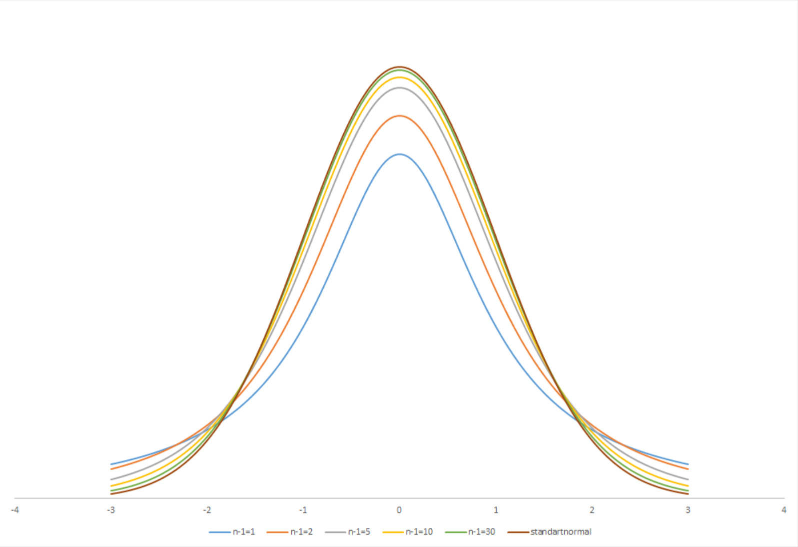
Problem 2:
Der Bruch $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}$ ist nicht mehr normalverteilt, da S^2 kein fester Parameter ist, sondern eine Zufallsvariable.

Lösung:
Teilen von Zähler und Nenner des Bruchs durch $\sqrt{\sigma^2/n}$ ergibt

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2/(n-1)}}$$

Der neue Bruch ist dann $t(n-1)$-verteilt.

Die (Student) t-Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden



Quantile der t-Verteilung

Wie bei der Standardnormalverteilung liegen die Quantile der t-Verteilung in Tabellenform vor.

Da die t-Verteilung mit n gegen die Standardnormalverteilung konvergiert, unterscheiden sich die Quantile in den beiden Tabellen für große n kaum.

Faustregel:

Für $n \geq 30$ können anstelle der Quantile der t-Verteilung einfach die Quantile des Standardnormalverteilung genutzt werden.

Einseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ bei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Daten und unbekanntem σ^2

$$\left(-\infty, \bar{X} + t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot \sqrt{S^2/n}\right]$$

wobei:

- α die Irrtumswahrscheinlichkeit und $1-\alpha$ die Vertrauenswahrscheinlichkeit,
- $t_{(n-1,1-\alpha)}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden und
- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ den erwartungstreuen Schätzer für σ^2 bezeichnen.

Zweiseitiges Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ bei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Daten und unbekanntem σ^2

$$\left[\bar{X} - t_{(n-1,1-\alpha/2)} \cdot \sqrt{S^2/n}, \bar{X} + t_{(n-1,1-\alpha/2)} \cdot \sqrt{S^2/n}\right]$$

wobei:

- α die Irrtumswahrscheinlichkeit und $1-\alpha$ die Vertrauenswahrscheinlichkeit,
- $t_{(n-1,1-\alpha/2)}$ das $1-\alpha/2$-Quantil der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden und
- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ den erwartungstreuen Schätzer für σ^2 bezeichnen.

Kritische Werte der t-Verteilung

	einseitig:	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
	zweiseitig:	20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits-	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
grade	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	$\vdots$					
	∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Konfidenzintervalle für μ bei unbekannter Verteilung F

Wir erhalten nun nur noch die Annahme, dass die Merkmalsausprägungen X_i identisch und unabhängig verteilt sind.

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass das standardisierte Stichprobenmittel $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ unter der iid-Voraussetzung für unendlich große Stichproben standardnormalverteilt ist.

Für große Stichproben können wir demnach die Methodik bei normalverteilten Daten und unbekannter Varianz für die Approximation von Konfidenzintervallen benutzen.

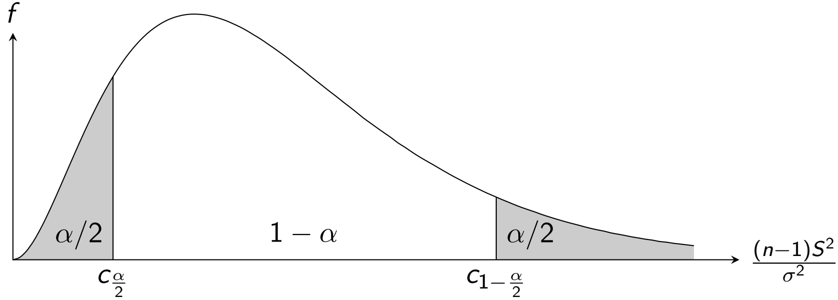
Symmetrische Konfidenzintervalle für die Varianz σ^2 bei normalverteilter Grundgesamtheit

Seien $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$.

Dann gilt nach Folie 17:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Symmetrisches Konfidenzintervall für σ^2



Für die Quantile $c_{\frac{\alpha}{2}}$ und $c_{1-\frac{\alpha}{2}}$ und der $\chi^2(n-1)$-Verteilung gilt:

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < c_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{c_{\alpha/2}} < \sigma^2\right) = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > c_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{c_{1-\alpha/2}} > \sigma^2\right) = \frac{\alpha}{2}$$

Symmetrisches Konfidenzintervall für σ^2

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{c_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{c_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

1. Lege das Konfidenzniveau $1-\alpha$ fest.
2. Berechne die Stichprobenvarianz S^2.
3. Bestimme das $\frac{\alpha}{2}$-Quantil und das $1-\frac{\alpha}{2}$-Quantil der $\chi^2(n-1)$-Verteilung.
4. Berechne die Intervallgrenzen.

Kapitel 14: Signifikanztests

- Gaußtest
- Binomialtest
- t-Test
- Approximativer Gaußtest
- χ^2-Test

Signifikanztest

Vermutungen über die Verteilung einer Grundgesamtheit:

- Welche Verteilung liegt vor?
  ($\rightarrow$ nicht-parametrischer Test)
- Welche Parameter hat diese Verteilung?
  ($\rightarrow$ parametrischer Test)

Formulierung dieser Vermutung als **Hypothese**.

Die Überprüfung dieser Hypothese anhand von Ergebnissen einer Stichprobe heißt **Signifikanztest**.

Gaußtest

Die Grundgesamtheit sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt.

Der Parameter σ^2 sei bekannt, der Parameter μ sei unbekannt.

Zufallsstichprobe: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (identisch und unabhängig)

(Null)Hypothese $H_0 : \ \mu = \mu_0$

Schätzer für μ: Stichprobenmittel $\bar{X}$.

Die Nullhypothese wird gegenüber einer Alternativhypothese H_1 abgelehnt, falls

a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$, wenn $|\bar{x} - \mu_0|$ „sehr groß“ ist
b) $H_1 : \mu < \mu_0$, wenn $\bar{x}$ „weit kleiner“ ist als μ_0
c) $H_1 : \mu > \mu_0$, wenn $\bar{x}$ „weit größer“ ist als μ_0

Signifikanzniveau α

Mögliche Fehlentscheidungen:

- **„Fehler 1. Art“**

  Die Nullhypothese wird abgelehnt, obwohl diese richtig ist.

- **„Fehler 2. Art“**

  Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt, obwohl diese falsch ist.

Forderungen:

- Der Fehler 1. Art darf nur mit Wahrscheinlichkeit α vorkommen. Wir nennen α das **Signifikanzniveau**.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art soll minimal sein.

Gauß-Statistik

Definiere Testfunktion

$$G = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Falls die Nullhypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ wahr ist, gilt:

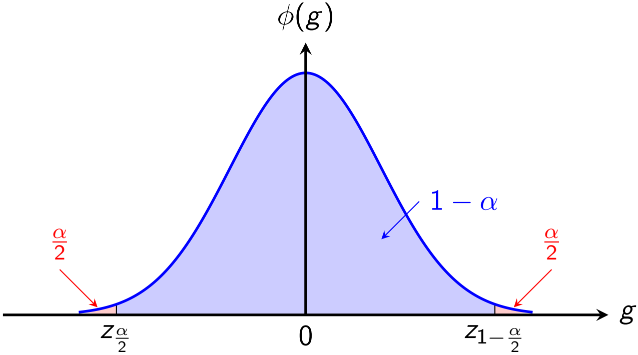
$$G \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Da wir die Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung kennen, können wir nun die ungenauen Ausdrücke „sehr groß“ und „weit kleiner/größer“ präzisieren.

Wir bezeichnen die Realisation der Zufallsvariable G mit g.

Alternativhypothese H_1 : $\mu \neq \mu_0$

Lehne H_0 gegenüber H_1 ab, falls $|\bar{x} - \mu_0|$ „sehr groß“.

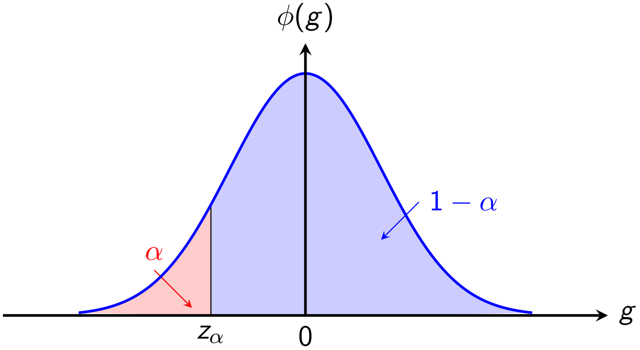


$|\bar{x} - \mu_0|$ ist „sehr groß“, falls $g < z_{\frac{\alpha}{2}}$ oder $g > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Wegen $-z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$:   , falls $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

Alternativhypothese $H_1: \ \mu < \mu_0$

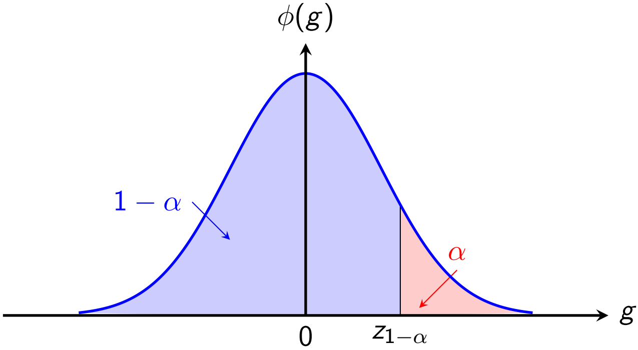
Lehne H_0 gegenüber H_1 ab, falls $\bar{x}$ „weit kleiner“ ist als μ_0.



$\bar{x}$ ist „weit kleiner“ als μ_0, falls $g < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Alternativhypothese $H_1: \ \mu > \mu_0$

Lehne H_0 gegenüber H_1 ab, falls $\bar{x}$ „weit größer“ ist als μ_0.



$\bar{x}$ ist „weit größer“ als μ_0, falls $g > z_{1-\alpha}$.

Entscheidungsregel des Gauß-Tests

Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ zugunsten H_1 ab, falls für $g = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ gilt:

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$, falls $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- $H_1 : \mu < \mu_0$, falls $g < -z_{1-\alpha}$
- $H_1 : \mu > \mu_0$, falls $g > z_{1-\alpha}$

Ist $H_0 : \mu = \mu_0$ tatsächlich wahr, so kann dennoch die Zufallsvariable $\bar{X}$ Werte $\bar{x}$ annehmen, die stark von μ_0 verschieden sind, bzw. die Gaußstatistik G kann Werte g annehmen, die jenseits des jeweiligen kritischen Wertes liegen.

Wenn dies eintritt, so wird die Nullhypothese abgelehnt, obwohl sie wahr ist (Fehler 1. Art).

Mit dieser Entscheidungsregel geschieht dies aber nur mit Wahrscheinlichkeit α.

Gaußtest: Zusammenfassung

Voraussetzungen: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, μ unbekannt, σ^2 bekannt

Schritt 1

Postuliere Nullhypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ und Alternativhypothese $H_1: \ \mu \neq \mu_0, \ \mu < \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$.

Schritt 2 Lege Signifikanzniveau α fest.

Schritt 3 Berechne Testfunktionswert

$$g = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Schritt 4 (Testentscheidung) Lehne H_0 zugunsten H_1 ab, falls

- $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $(H_1: \ \mu \neq \mu_0)$
- $g < -z_{1-\alpha}$ $(H_1: \ \mu < \mu_0)$
- $g > z_{1-\alpha}$ $(H_1: \ \mu > \mu_0)$

Einheitliches Schema für allgemeine Signifikanztests

- Postuliere die **Nullhypothese** H_0 und eine **Alternativhypothese** H_1.
- Lege das **Signifikanzniveau** α fest.
- Definiere eine **Testfunktion** V.
- Lege den **Verwerfungsbereich** B fest.
- **Entscheidungsregel:**
  Lehne H_0 zugunsten von H_1 ab, falls die Realisierung v der Testfunktion V im Verwerfungsbereich B liegt.

Binomialtest

Die Grundgesamtheit sei Bernoulli-verteilt mit Parameter p, also $B(1, p)$.

Der Parameter p sei unbekannt.

Zufallsstichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (identisch und unabhängig)

Nullhypothese $H_0: \; p = p_0$

Schätzer für p: Stichprobenmittel $\bar{X}$.

Die Nullhypothese wird gegenüber einer Alternativhypothese H_1 abgelehnt, falls

a) $H_1 : p \neq p_0$, wenn $|\bar{x} - p_0|$ „sehr groß“ ist
b) $H_1 : p < p_0$, wenn $\bar{x}$ „weit kleiner“ ist als p_0
c) $H_1 : p > p_0$, wenn $\bar{x}$ „weit größer“ ist als p_0

Testfunktion für Binomialtest

Definiere die Teststatistik

$$V = \sum_{i=1}^{n} X_i = n \cdot \bar{X}$$

Falls die Nullhypothese $H_0: \; p = p_0$ wahr ist, gilt:

$$V \sim B(n, p_0)$$

Da wir die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung kennen, können wir mit den Quantilen der Binomialverteilung die Verwerfungsbereiche festlegen.

Da die Binomialverteilung eine diskrete Verteilung ist, existieren für manche Wahrscheinlichkeiten α mehrere α-Quantile. In diesen Fällen legen wir den Verwerfungsbereich so fest, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens α beträgt.

Verwerfungsbereich für Binomialtest bei $H_1: \; p \neq p_0$

Die binomialverteilte Teststatistik $V = \sum_{i=0}^{n} X_i$ kann die Werte $\{0, 1, \ldots, n\}$ annehmen.

Wir suchen die größte untere Schranke $c_1 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit:

$$\mathbb{P}(V \leq c_1) \leq \frac{\alpha}{2}$$

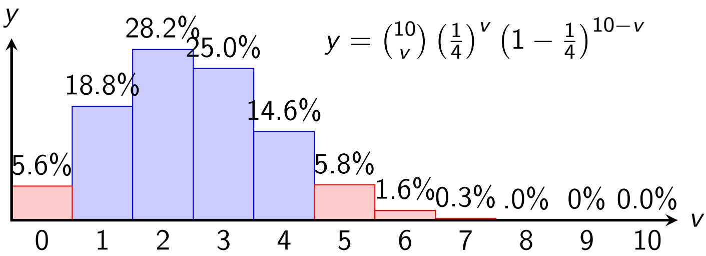
Da c_1 die größte untere Schranke ist, gilt ebenfalls

$$\mathbb{P}(V \leq c_1 + 1) > \frac{\alpha}{2}$$

Analog suchen wir die kleinste obere Schranke c_2 mit

$$\mathbb{P}(V \geq c_2) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ und } \mathbb{P}(V \geq c_2 - 1) > \frac{\alpha}{2}$$

Verwerfungsbereiche $V \sim B(10, \frac{1}{4})$, $H_1 : p \neq \frac{1}{4}$, $\alpha = 20\%$



Testentscheidung

Lehne $H_0 : p = \frac{1}{4}$ gegenüber $H_1 : p \neq \frac{1}{4}$ ab, falls $v = \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ oder falls $v \geq 5$.

Die Grenzen lauten hier $c_1 = 0$ und $c_2 = 5$. Beachte, dass hier gilt:

$$\mathbb{P}\left(V \leq c_1 \vee V \geq c_2 \middle| p = \frac{1}{4}\right) = 13,44\% < 20\% = \alpha$$

Verwerfungsbereiche Binomialtest für $H_1 : p < p_0$ bzw. $H_1 : p > p_0$

Für die Alternativhypothese $H_1 : p < p_0$ suchen wir die untere Schranke c mit

$$\mathbb{P}(V \leq c) \leq \alpha \text{ und } \mathbb{P}(V \leq c + 1) > \alpha$$

und für $H_1 : p > p_0$ suchen wir $\tilde{c}$ mit

$$\mathbb{P}(V \geq \tilde{c}) \leq \alpha \text{ und } \mathbb{P}(V \geq \tilde{c} + 1) > \alpha$$

Testentscheidungen

Bei $H_1 : p < p_0$ lehnen wir $H_0 : p = p_0$ ab, falls $v \leq c$ und

Bei $H_1 : p > p_0$ lehnen wir $H_0 : p = p_0$ ab, falls $v \geq \tilde{c}$.

Binomialtest: Zusammenfassung

Voraussetzungen: $X_i \overset{iid}{\sim} B(1, p)$, $i = 1, \ldots, n$, p unbekannt

Schritt 1

Postuliere Nullhypothese $H_0: \; p = p_0$ und Alternativhypothese $H_1: \; p \neq p_0, \; p < p_0$ oder $p > p_0$.

Schritt 2 Lege Signifikanzniveau α fest.

Schritt 3 Berechne Testfunktionswert

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Schritt 4 (Testentscheidung) Lehne H_0 zugunsten H_1 ab, falls

- $v \leq c_1$ oder $v \geq c_2$ ($H_1: \; p \neq p_0$)
- $v \leq c$ ($H_1: \; p < p_0$)
- $v \geq \tilde{c}$ ($H_1: \; p > p_0$)

Binomialtest bei großen Stichproben

Bei großen Stichproben kann, falls p nicht zu nah an null oder zu nah an eins liegt, eine Testfunktion definiert werden, welche approximativ normalverteilt ist.

Zusätzliche Voraussetzungen: $n \geq 30, 10 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n - 10$

Die Teststatistik kann dann wie folgt definiert werden:

$$V = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

Der Verwerfungsbereich B wird nun wie beim Gaußtest anhand der Quantile der Standardnormalverteilung festgelegt.

t-Test

Die Grundgesamtheit sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt.

Die Parameter μ und σ^2 seien unbekannt.

Zufallsstichprobe: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (unabhängig)

Nullhypothese $H_0 : \ \mu = \mu_0$

Schätzer für μ: Stichprobenmittel $\bar{X}$.

Die Nullhypothese wird gegenüber einer Alternativhypothese H_1 abgelehnt, falls

a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$, wenn $|\bar{x} - \mu_0|$ „sehr groß“ ist

b) $H_1 : \mu < \mu_0$, wenn $\bar{x}$ „weit kleiner“ ist als μ_0

c) $H_1 : \mu > \mu_0$, wenn $\bar{x}$ „weit größer“ ist als μ_0

t-Statistik

Definiere Testfunktion

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \ ,$$

wobei $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$

Falls die Nullhypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ wahr ist, gilt:

$$T \sim t(n-1)$$

Da wir die Wahrscheinlichkeiten der $t(n-1)$-Verteilung kennen, ist der Verwerfungsbereich durch die Quantile der $t(n-1)$-Verteilung festgelegt.

t-Test: Zusammenfassung

Voraussetzungen: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, μ und σ^2 unbekannt

Schritt 1

Postuliere Nullhypothese $H_0: \; \mu = \mu_0$ und Alternativhypothese $H_1: \; \mu \neq \mu_0, \; \mu < \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$.

Schritt 2 Lege Signifikanzniveau α fest.

Schritt 3 Berechne Testfunktionswert

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Schritt 4 (Testentscheidung) Lehne H_0 zugunsten H_1 ab, falls

- $|t| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ $(H_1: \; \mu \neq \mu_0)$
- $t < -t_{n-1,1-\alpha}$ $(H_1: \; \mu < \mu_0)$
- $t > t_{n-1,1-\alpha}$ $(H_1: \; \mu > \mu_0)$

Approximativer Gaußtest

Die Grundgesamtheit sei beliebig verteilt.

Die Parameter μ und σ^2 seien unbekannt.

Zufallsstichprobe: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (unabhängig)

Die Stichprobengröße beträgt mindestens $n = 30$.

Nullhypothese: $H_0: \; \mu = \mu_0$

Teststatistik: wie t-Test

Verwerfungsbereich & Testentscheidung: wie Gauß-Test.

χ^2-Test für die Varianz

Die Grundgesamtheit sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt.

Die Parameter μ und σ^2 seien unbekannt.

Zufallsstichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (unabhängig)

Nullhypothese $H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2$

Schätzer für Varianz:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \text{ mit } \mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$$

Lehne H_0 gegenüber H_1 ab, falls

- $H_1: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, wenn $|s^2 - \sigma_0^2|$ „sehr groß“ ist
- $H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$, wenn s^2 „weit kleiner“ ist als σ_0^2
- $H_1: \ \sigma^2 > \sigma_0^2$, wenn s^2 „weit größer“ ist als σ_0^2

χ^2-Teststatistik

Testfunktion:

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

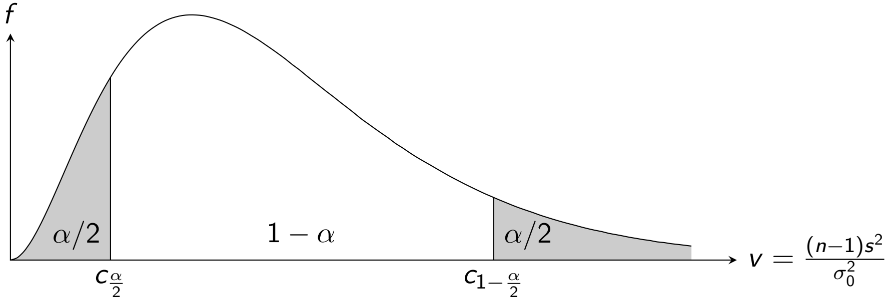
Unter der Nullhypothese $H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2$ gilt:

$$V \sim \chi^2(n-1) \text{ mit } \mathbb{E}[V] = n-1$$

Wir legen nun die Ablehnungsbereiche anhand der Quantile der $\chi^2(n-1)$-Verteilung fest.

Alternativhypothese $H_1 : \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

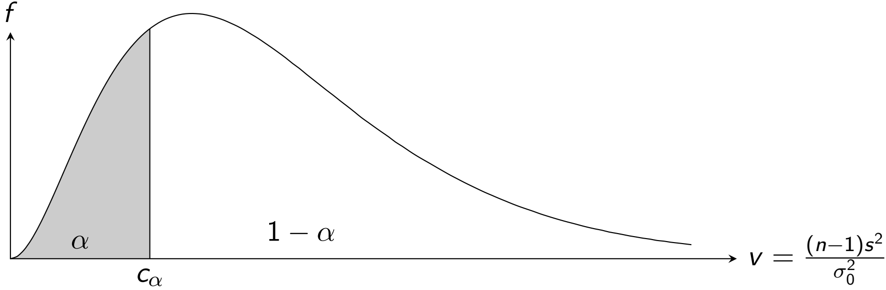
Lehne H_0 gegenüber H_1 ab, falls $|s^2 - \sigma_0^2|$ „sehr groß".



$|s^2 - \sigma_0^2|$ ist „sehr groß", falls $v < c_{\frac{\alpha}{2}}$ oder falls $v > c_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Alternativhypothese $H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$

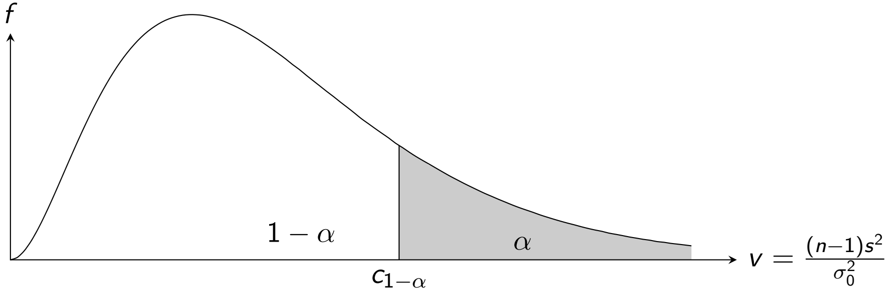
Lehne H_0 gegenüber H_1 ab, falls s^2 „weit kleiner“ ist als σ_0^2.



s^2 ist „weit kleiner“ als σ_0^2, falls $v < c_\alpha$.

Alternativhypothese $H_1: \ \sigma^2 > \sigma_0^2$

Lehne H_0 gegenüber H_1 ab, falls s^2 „weit größer" ist als σ_0^2.



s^2 ist „weit größer" als σ_0^2, falls $v > c_{1-\alpha}$.

χ^2-Test: Zusammenfassung

Voraussetzungen: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, μ und σ^2 unbekannt

Schritt 1

Postuliere Nullhypothese $H_0: \ \sigma = \sigma_0$ und Alternativhypothese $H_1: \ \sigma \neq \sigma_0, \ \sigma < \sigma_0$ oder $\sigma > \sigma_0$.

Schritt 2 Lege Signifikanzniveau α fest.

Schritt 3 Berechne Testfunktionswert

$$v = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Schritt 4 (Testentscheidung) Lehne H_0 zugunsten von H_1 ab, falls

- $v < c_{\frac{\alpha}{2}}$ oder $v > c_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $(H_1: \ \sigma \neq \sigma_0)$
- $v < c_{\alpha}$ $(H_1: \ \sigma < \sigma_0)$
- $v > c_{1-\alpha}$ $(H_1: \ \sigma > \sigma_0)$

Zwei Bemerkungen zum χ^2-Test

- Sollte der Parameter μ bekannt sein, so kann die Testfunktion $V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$ benutzt werden. V ist dann $\chi^2(n)$ verteilt.

- Ist die Grundgesamtheit nicht normalverteilt, so kann auch bei großen Stichproben das Testverfahren nicht approximativ verwendet werden.

Kontingenztest

Dieser Test überprüft, ob zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

Die Vorgehensweise ist hier wie bei der Erstellung einer Kontingenztabelle in Teil 1, Kapitel 4.

h_{ij}: gemeinsame Häufigkeit der Ausprägung $(x, y) = (a_i, b_j)$

$h_{i\bullet}$: Häufigkeit der Ausprägung $x = a_i$

$h_{\bullet j}$: Häufigkeit der Ausprägung $y = b_j$

Unter der Nullhypothese $H_0 : \; X, Y$ unabhängig gilt

$$\mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j) = \mathbb{P}(X = a_i) \cdot \mathbb{P}(Y = b_j)$$

Wir benutzen nun $\frac{1}{n} h_{ij}$ als Schätzer für $\mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j)$, $\frac{1}{n} h_{i\bullet}$ für $\mathbb{P}(X = a_i)$ und $\frac{1}{n} h_{\bullet j}$ für $\mathbb{P}(Y = b_j)$ und lehnen H_0 ab, falls $\frac{1}{n} h_{ij}$ „stark veschieden“ ist von $\frac{1}{n} h_{i\bullet} \cdot \frac{1}{n} h_{\bullet j}$.

Teststatistik

Die Teststatistik entspricht exakt χ^2 aus Kapitel 4!

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(h_{ij} - \tilde{h}_{ij}\right)^2}{\tilde{h}_{ij}}$$

$\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{n} h_{i\bullet} h_{\bullet j}$

k: Anzahl der Ausprägungen von X

l: Anzahl der Ausprägungen von Y.

χ^2, deren Werte v für die Teststatistik berechnet werden, ist unter der Nullhypothese der Unabhängigkeit von X und Y $\chi^2_{(k-1)(l-1)}$-verteilt.

Verwerfungsbereich

Für ein gegebenes Signifikanzniveau α ist unter der Nullhypothese der Unabhängigkeit von X und Y die Wahrscheinlichkeit, dass χ^2 einen Wert v annimmt, welcher größer als das $1-\alpha$-Quantil $c_{1-\alpha}$ der $\chi^2_{(l-1)(k-1)}$-Verteilung ist, gerade α:

$$\mathbb{P}\left(\chi^2 \geq c_{1-\alpha}\right) = \alpha$$

Daher lehnen wir die Nullhypothese ab, falls $v > c_{1-\alpha}$.

Kontingenztest: Zusammenfassung

Voraussetzungen: X, Y diskrete Zufallsvariablen mit l bzw. k Ausprägungen

Schritt 1

Postuliere Nullhypothese $H_0: \; X, Y$ unabhängig.

Schritt 2 Lege Signifikanzniveau α fest.

Schritt 3 Berechne Testfunktionswert

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(h_{ij} - \tilde{h}_{ij}\right)^2}{\tilde{h}_{ij}}$$

Schritt 4 (Testentscheidung)

Lehne H_0 ab, falls $v > c_{1-\alpha}$, wobei $c_{1-\alpha}$ das $1-\alpha$-Quantil der χ^2 Verteilung mit $(l-1)(k-1)$ Freiheitsgraden ist.