Statistik

Technische Universität Dortmund — Fakultät Wirtschaftswissenschaften — 19. März 2025

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ____________________

Studiengang ____________________ Vorname ____________________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 14 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß Liste als Hilfsmittel zugelassen.

Bei 26 von maximal 42 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 11	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 12	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 13	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 14	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐					

Aufgabe 1 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Welches der folgenden Merkmale ist nicht quantitativ?

a) Wahlentscheidung bei der vergangenen Bundestagswahl

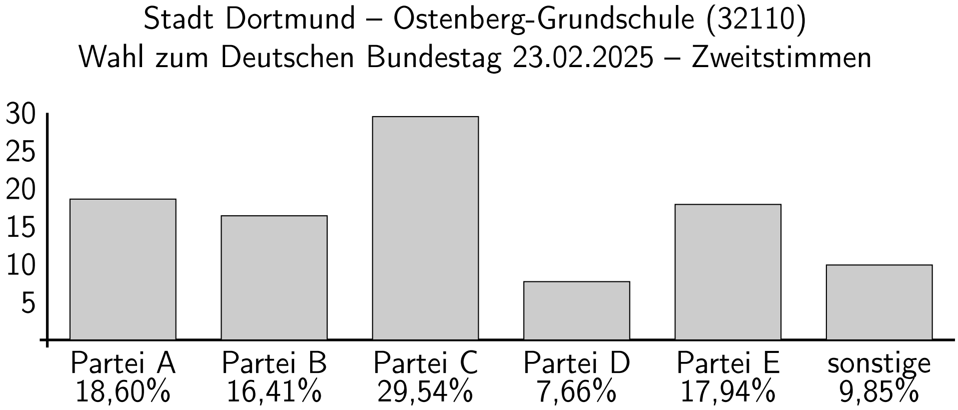
b) Monatliche Ausgaben für Mobilität

c) Ausstoß von CO_2 im Jahr

d) Wartezeit auf Termin bei Arzt / Ärztin

Aufgabe 2 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Das Wahlergebnis der Bundestagswahl 2025 eines Wahlraums in Uni-Nähe werden wie folgt präsentiert:



Die Parteinamen wurden durch neutrale Bezeichnungen ersetzt.

„Sonstige“ fasst alle Parteien zusammen, welche weniger als 5% der Zweitstimmen auf sich vereinigen konnten.

Um welche Darstellung handelt es sich bei obigem Diagramm?

a) Säulendiagramm

b) Histogramm

c) Kreissektorendiagramm

d) Boxplot

Aufgabe 3 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Das Wahlergebnis der Bundestagswahl 2025 eines Wahlraums (Nr. 32110) in Uni-Nähe lautet wie folgt:

Partei	Partei A	Partei B	Partei C	Partei D	Partei E	sonstige
Zweitstimmenanteil	18,60%	16,41%	29,54%	7,66%	17,94%	9,85%

Die Parteinamen wurden durch neutrale Bezeichnungen ersetzt.

„Sonstige“ fasst alle Parteien zusammen, welche weniger als 5% der Zweitstimmen auf sich vereinigen konnten.

Es sei angenommen, dass die fünf Parteien „Partei A“, „Partei B“ , . . . , „Partei E“ und „sonstige“ nicht objektiv im politischen Spektrum gereiht werden können.

Welche der folgenden Kennzahlen ist in diesem Kontext sinnvoll?

a) Der Modalwert

b) Das arithmetische Mittel

c) Der Median

d) keine der angegebenen Kennzahlen ist in diesem Kontext sinnvoll.

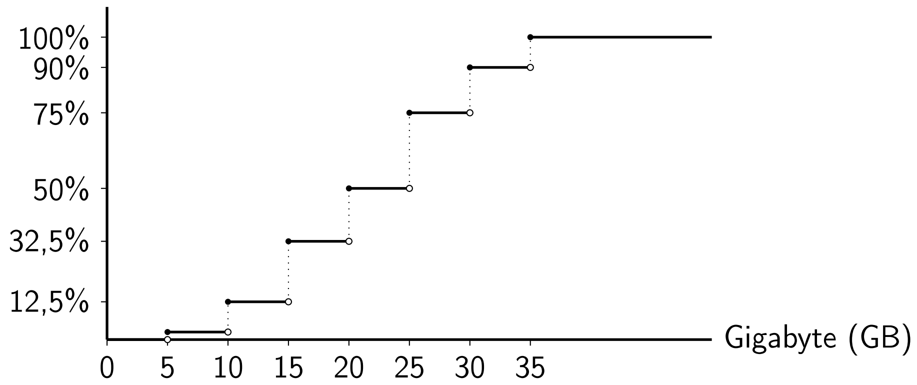
Aufgabe 4 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

40 zufällig ausgewählte Personen wurden nach dem Datenvolumen ihres Mobilfunkvertrags befragt.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Personen, deren Antworten 5, 10, 15, ... lauten:

Datenvolumen (in GB)	5	10	15	20	25	30	35
Anzahl Personen	1	4	8	7	10	6	4

Wie lautet die Funktion, welche durch den Graphen im folgenden Diagramm dargestellt wird?



a) Relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

b) Absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung

c) Mittlere quadratische Abweichung

d) Bedingte relative Häufigkeit

Aufgabe 5 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

40 zufällig ausgewählte Personen wurden nach dem Datenvolumen ihres Mobilfunkvertrags gefragt.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Personen, deren Antworten 5, 10, 15, ... lauten:

Datenvolumen (in GB)	5	10	15	20	25	30	35
Anzahl Personen	1	4	8	7	10	6	4

Welche der folgenden Datenvolumen in Gigabyte ist kein Median der obigen Stichprobe?

a) 15 GB

b) 20 GB

c) 22 GB

d) 25 GB

Aufgabe 6 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es seien A und B zwei zufällige Ereignisse. Folgende Wahrscheinlichkeiten seien bekannt:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, lautet $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, lautet $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt, lautet $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintreten?

a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$

b) $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$

c) $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

d) $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{7}{12}$

Aufgabe 7 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen.

Y nimmt mit Wahrscheinlichkeit 25% den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit 75% den Wert 0 an.

Wenn Y den Wert 1 annimmt, nimmt X mit Wahrscheinlichkeit 40% den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit 60% den Wert 0 an.

Wenn Y den Wert 0 annimmt, nimmt X mit Wahrscheinlichkeit 20% den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit 80% den Wert 0 an.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt $X \cdot Y$ den Wert 1 annimmt?

a) $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 10\%$

b) $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 25\%$

c) $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 15\%$

d) $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 5\%$

Aufgabe 8 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen, wobei $Y = X^2$.

Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsvariablen gelte:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$$

Wie lautet die Varianz von X?

a) $Var(X) = \frac{2}{9}$

b) $Var(X) = \frac{1}{9}$

c) $Var(X) = -\frac{1}{9}$

d) Die Varianz lässt sich mit den angegebenen Informationen nicht berechnen.

Aufgabe 9 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und für die Zufallsvariable Y gelte $Y = 8 \cdot (X - 1)$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $Y \geq 0$?

Hinweis:
Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

Die Antwortmöglichkeiten sind auf zwei Nachkommastellen gerundet.

a) $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 15,87\%$

b) $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 84,13\%$

c) $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 50,00\%$

d) $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1,96$

Aufgabe 10 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall von 2 bis 5, also $X \sim \mathcal{U}(2, 5)$.

Wie lautet der bedingte Erwartungswert von X, falls $X \geq 3$?

a) $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 4$

b) $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 3,5$

c) $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 3$

d) $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 5$

Aufgabe 11 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Effiziente Schätzer streuen innerhalb der erwartungstreuen Schätzer am wenigsten.

b) Effiziente Schätzer schätzen den wahren Parameter „im Mittel“ richtig.

c) Keine der anderen Aussagen ist richtig.

d) Effiziente Schätzer müssen nicht notwendig auch erwartungstreu sein.

Aufgabe 12 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Es sei angenommen, dass die Beobachtungen $x_1, \ldots, x_{20}$ Realisationen von identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien.

Es gelte $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 26)$ für $i = 1, \ldots, 20$, wobei μ den unbekannten Erwartungswert von X_i bezeichne und die Varianz von X_i den Wert 26 habe.

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen $x_1, \ldots, x_{20}$ betrage $\bar{x} = 27$.

Wie lautet das symmetrische Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha = 95\%$?

Hinweis:
Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

Die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten wurden auf eine Nachkommastelle gerundet.

a) $[24{,}8\ ;\ 29{,}2]$

b) $[17{,}0\ ;\ 37{,}0]$

c) $(\infty\ ;\ 35{,}4)$

d) $[13{,}9\ ;\ 40{,}1]$

Aufgabe 13 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Es sei angenommen, dass die Beobachtungen $x_1, \ldots, x_{20}$ Realisationen von identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien.

Es gelte $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $i = 1, \ldots, 20$, wobei μ den unbekannten Erwartungswert und σ^2 die unbekannte Varianz von X_i bezeichne.

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen $x_1, \ldots, x_{20}$ betrage $\bar{x} = 27$.

Die Stichprobenvarianz der Beobachtungen $x_1, \ldots, x_{20}$ betrage $s^2 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 22,8$.

Wie lautet das symmetrische Konfidenzintervall für μ zum Niveau $1 - \alpha = 95\%$?

a) $[24{,}8 \ ; \ 29{,}2]$

b) $[17{,}0 \ ; \ 37{,}0]$

c) $[17{,}63 \ ; \ 36{,}37]$

d) $[17{,}87 \ ; \ 36{,}13]$

Aufgabe 14 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Es sei angenommen, dass die Beobachtungen $x_1, \ldots, x_{20}$ Realisationen von identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien.

Es gelte $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $i = 1, \ldots, 20$, wobei μ den unbekannten Erwartungswert und σ^2 die unbekannte Varianz von X_i bezeichne.

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen $x_1, \ldots, x_{20}$ betrage $\bar{x} = 27$.

Die Stichprobenvarianz betrage $\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 22{,}8$.

Wie lautet der Wert der anzuwendenden Teststatistik unter der Nullhypothese $H_0\ \mu = 25$?

a) $t = \frac{27-25}{\sqrt{\frac{22{,}8}{20}}}$

b) $t = \frac{27-25}{\sqrt{\frac{22{,}8}{19}}}$

c) $t = \frac{27-25}{\frac{1}{19}\sqrt{22{,}8}}$

d) $t = \frac{27-2}{\sqrt{\frac{22{,}8}{20}}}$

Formelsammlung zu Teil 1 deskriptive Statistik

Eindimensionale Daten (Kapitel 3)

n: Stichprobenumfang, $x_1, \ldots, x_n$ Stichprobenwerte, $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ geordnete Stichprobenwerte
$a_j,\ j = 1, \ldots, k$: Ausprägungen, $h(a_j)$ bzw. $f(a_j) = \frac{h(a_j)}{n}$: absolute bzw. relative Häufigkeit von a_j
$H(x) = \sum_{a_j \leq x} h(a_j)$ bzw. $F(x) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)$: absolute bzw. relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

Lageparameter
Modalwert x_{Mod} (beliebige Skalierung): für Ausprägung $a = x_{Mod}$ gilt $h(x_{Mod}) \geq h(a_j)$ für alle $j = 1, \ldots, k$
Median x_{Med} (ordinale Skalierung): Für $a = x_{Med}$ gilt $\sum_{a_j \leq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$ und $\sum_{a_j \geq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$.
Arithmetisches Mittel (kardinale Skalierung): $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} a_j f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Geometrisches Mittel x_{Geom} (kardinale Skalierung): $x_{Geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}$ (nur für $x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$)

Streuungsmaße (alle: kardinale Skalierung)
Spannweite: $SP = \max_i x_i - \min_i x_i$
Durchschnittliche Abweichung von $\lambda \in \mathbb{R}$: $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \lambda|$
Mittlere quadratische Abweichung $s^2 = \sum_{j=1}^{k} (a_j - \bar{x})^2 \cdot f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Konzentrationsmaße (alle: kardinale Skalierung)

Variationskoeffizient: $V = s/\bar{x}$
Lorenzkurve: Polygonzug durch (u_k, v_k), $k = 0, \ldots, n$ mit $u_0 = v_0 = 0$, $u_k = \frac{k}{n}$, $v_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ für $k = 1, \ldots, n$
Gini-Koeffizient: $G = 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n+1}{n} = \sum_{k=2}^{n} u_{k-1} v_k - u_k v_{k-1}$
Herfindahl-Index: $H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right)^2$

Mehrdimensionale Daten (Kapitel 4)

Merkmale X und Y mit Ausprägungen $a_1, \ldots, a_k$ und $b_1, \ldots, b_l$
Abs. Häufigkeit von (a_i, b_j): $h_{ij} = h(a_i, b_j)$, *Randhäufigkeit von* a_i *bzw.* b_j: $h_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij}$, $h_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$
Relative Häufigkeiten: $f_{ij} = \frac{1}{n} h_{ij}$, $f_{i\bullet} = \frac{1}{n} h_{i\bullet}$, $f_{\bullet j} = \frac{1}{n} h_{\bullet j}$
Bedingte relative Häufigkeiten: $f_1(a_i|b_j) = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}$, $f_2(b_j|a_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}}$
X *und* Y *unabhängig*: $f_1(a_i|b_j) = f_{i\bullet} \Leftrightarrow h_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n} \Leftrightarrow f_2(b_j|a_i) = f_{\bullet j}$ für alle i, j
Kovarianz von X *und* Y (kardinale Skalierung): $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $(= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y})$
(Bravais-Pearson-)Korrelationskoeffizient von X *und* Y (kardinale Skalierung): $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$
Rangkorrelation von Spearman (ordinale Skalierung): $r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})(R(y_i) - \frac{n+1}{2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(y_i) - \frac{n+1}{2})^2}}$,
wobei $R(x_i)$: Rang von x_i, $R(y_i)$: Rang von y_i
Kontingenzkoeffizient (beliebige Skalierung): $K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$ mit $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$, wobei $\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}$

Lineare Transformation: $y_i = a + b \cdot x_i$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$y_{Mod} = a + b \cdot x_{Mod},\ y_{Med} = a + b \cdot x_{Med},\ \bar{y} = a + b \cdot \bar{x},\ s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2,\ s_y = |b| \cdot s_x,\ s_{zy} = b \cdot s_{zx},\ s_{xy} = \begin{cases} s_x \cdot s_y & , b \geq 0 \\ -s_x \cdot s_y & , b < 0 \end{cases}$$

Indexzahlen (Kapitel 5)

Güter: n, Preis p und Menge q von Gut i in Basis- bzw. Berichtsperiode: $p_0(i)$ und $q_0(i)$ bzw. $p_t(i)$ und $q_t(i)$
Preisindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $P_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $P_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}$, $P_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$
Mengenindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $Q_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$

Formelsammlung zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

ω: Elem.-ereignis, Ω: Ergebnismenge, $A \subset \Omega$: Ereignis, $\mathcal{A}$: Ereignissystem mit $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A}, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten (Kapitel 7)

Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq}$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (falls $\mathbb{P}(B) > 0$).
Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$, wobei $A_1, \ldots, A_k$ Partition von Ω
Formel von Bayes: $\mathbb{P}(A_j|B) = \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j) / \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$
Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, falls: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Zufallsvariablen und Verteilungen (Kapitel 8)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *W'keit von Zufallsv.*: $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ für $B \subseteq \mathbb{R}$
Verteilungsfunktion: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ und $F(b) - F(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$ für $a < b$.
Diskrete Zufallsvariable: Falls Wertebereich $\{x_1, x_2, \ldots\}$ abzählbar. $p_i = \mathbb{P}(X(\omega) = x_i)$
- *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$, *Verteilungsfunktion* $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- *Gemeinsame W'keitsfunktion* $f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, *gem. V-funktion* $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$
- *Randwahrscheinlichkeiten*: $f_1(x) = \sum_{j=1}^{m} f(x, y_j)$, $f_2(y) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y)$
- *Randverteilungen*: $F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} f_1(x_i)$, $F_2(y) = \sum_{y_j \leq y} f_2(y_j)$

Stetige Zufallsvariable: Falls Wertebereich überabzählbar, z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq}$ oder $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- *Dichtefunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- *Verteilungsfunktion* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \mathbb{P}(X \leq x)$
- Gemeinsame Dichtefunktion $f(x, y)$, gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t, s)dsdt$
- *Randdichten*: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$
- *Randverteilungen*: $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt$, $F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(s)ds$
- *Bedingte W'keits- bzw. Dichtefunktion*: $f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$, $f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ (falls $f_1(x), f_2(y) > 0$)

Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig, falls: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ bzw. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

Verteilungsparameter (Kapitel 9)

α-Quantil x_α: $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha$ und $\mathbb{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$. Falls X stetig und $f(x) > 0$ für alle x: $F(x_\alpha) = \alpha$
Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i f(x_i)$ (falls X diskret) bzw. $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ (falls X stetig)
Rechenregeln: $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y + c] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b \cdot \mathbb{E}[Y] + c$. Falls X, Y unabhängig: $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Bedingte Erwartungswerte: $\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_i x_i f_1(x_i|y)$ (diskret) bzw. $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(t|y)dt$ (stetig)
Varianz σ^2 und Standardabweichung σ: $\sigma^2 = Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
Kovarianz von X und Y: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Korrelation von X und Y: $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$
Rechenregeln: $Var(a + b \cdot X) = b^2 Var(X)$, $Var(a + b \cdot X + c \cdot Y) = b^2 Var(X) + 2bcCov(X, Y) + c^2 Var(Y)$
Ungleichung von Tschebyscheff: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$

Einige wichtige Verteilungen

Bernoulliverteilung, $X \sim B(1, p)$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, $\mathbb{E}[X] = p$, $Var(X) = p(1 - p)$
Binomialverteilung, $X \sim B(n, p)$: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_i \overset{iid}{\sim} B(1, p)$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, $\mathbb{E}[X] = np$, $Var(X) = np(1 - p)$
Poissonverteilung, $X \sim P(\lambda)$: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$
Gleichverteilung $X \sim U(a, b)$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ für $a \leq x \leq b$, $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $\mathbb{E}[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$
Standardnormalverteilung $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ mit Dichte ϕ und Verteilungsfunktion Φ (siehe Anhang).
Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $F(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (*Standardisierung*: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$).

Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz (Kapitel 10)

X_i unabhängig und identisch verteilt (iid) mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1$ für alle $\epsilon > 0$.
Zentraler Grenzwertsatz: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

Formelsammlung zu Teil 3 Inferenzstatistik

Grundlagen der Induktiven Statistik (Kapitel 11) (mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

Wichtige Testverteilungen

χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden: $C \sim \chi^2(n)$, $C = \sum_{i=1}^n X_i^2$ mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. $\mathbb{E}[C] = n$, $Var(C) = 2n$
t-Vert. mit n FG: $T = \frac{X}{\sqrt{C/n}} \sim t(n)$ mit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $C \sim \chi^2(n)$, X, C unabh. $\mathbb{E}[T] = 0$, $Var(T) = \frac{n}{n-2}$.

Wichtige Stichprobenfunktionen

Stichprobenmittel: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, *Gauß-Statistik*: $G = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Mittlere quadratische Abweichung bzgl. μ: $M^2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, $\mathbb{E}[M^2(\mu)] = \sigma^2$, $\frac{n}{\sigma^2}M^2(\mu) \sim \chi^2(n)$
Mittlere quadratische Abweichung: $M^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[M^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
Stichprobenvarianz: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$, $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$
t-Statistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Punktschätzung (Kapitel 12)

Schätzer für unbekannten Parameter θ: Funktion $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \to \Theta$ (mit Θ: Menge aller möglichen Parameter)
Erwartungstreue: $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ für alle $\theta \in \Theta$, *Effizienz*: $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\tilde{\theta})$ für alle erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}$
Konsistenz: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon\right) = 0$ für alle $\epsilon > 0$.
Kleinste Quadrate Schätzer $\hat{\theta}^{LS}$ für $\theta = \mu$: $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ (minimiert $\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta})^2$. $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ ist e-treu und effizient.)

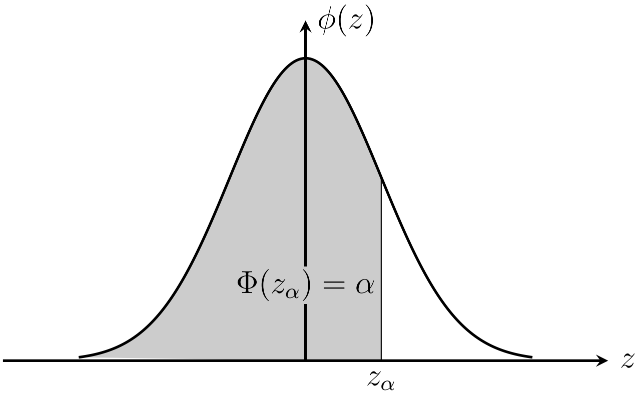
Intervall-Schätzung (Kapitel 13)

α-Quantil z_α für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Symmetrie $\Rightarrow \Phi(-z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = \Phi(z_{1-\alpha})$
Einseitige Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 bekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 bekannt: $\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $t_{(n-1,\alpha)}$ für $T \sim t(n-1)$: $\mathbb{P}(T \leq t_{(n-1,\alpha)}) = \alpha$
Eins. Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 unbekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 unbekannt: $\left[\bar{X} - t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $c_{(n-1,\alpha)}$ für $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$: $\mathbb{P}\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \leq c_{(n-1,\alpha)}\right) = \alpha$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für σ^2: $\left[\frac{n-1}{c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}S^2, \frac{n-1}{c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}S^2\right]$

Signifikanztests (Kapitel 14)

Gaußtest: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ unbekannt, σ^2 bekannt. Teststatistik: $G = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Lehne $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ab, falls $g > z_{1-\alpha}$. Lehne $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ab, falls $g < -z_{1-\alpha}$
Binomialtest: $X_i \overset{iid}{\sim} B(n,p)$, p unbek. Teststat.: $V = \sum_{i=1}^n X_i$. Größtes c_1 mit $\mathbb{P}(X \leq c_1) \leq \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \leq c_1 + 1) > \frac{\alpha}{2}$. Kleinstes c_2 mit $\mathbb{P}(X \geq c_2) \leq \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \geq c_2 - 1) > \frac{\alpha}{2}$. Lehne $H_0 : p = p_0$ ab, falls $v < c_1 \vee v > c_2$.
t-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $t > t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ab, falls $t > t_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ab, falls $t < -t_{(n-1,1-\alpha)}$.
Approximativer Gaußtest: X_i iid bel. vert., μ, σ^2 unbek., $n \geq 30$. Teststatistik: T. Testentsch.: wie Gauß-Test.
χ^2-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $V = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2}S^2$. Lehne $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}$ oder $v > c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ab, falls $v > c_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\alpha)}$.
Kontingenztest: $H_0 : X, Y$ unabhängig. Teststatistik: χ^2 aus Kapitel 4. Lehne H_0 ab, falls $\chi^2 > c_{(m,1-\alpha)}$, wobei $m = (\#$ Auspr. von $X - 1)(\#$ Auspr. von $Y - 1)$

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Hinweis zur Benutzung dieser Tabelle:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als $x+y$, ist in der Zeile x und Spalte y abzulesen. Zum Beispiel gilt: $\mathbb{P}(Z \leq 1,5+0,06) = \Phi(1,56) = 0,9406$, also 94,06%.

Für Wahrscheinlichkeiten $\alpha < 0,5$ kann $z_\alpha = 1 - z_{1-\alpha}$ benutzt werden.

Kritische Werte der t-Verteilung

		Signifikanzniveau				
	einseitig:	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
	zweiseitig:	20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits-	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
grade	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
	120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
	∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Hinweise zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei T eine Zufallsvariable, welche t-verteilt ist mit n Freiheitsgraden.

Einseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(T \leq t_{(n,1-\alpha)}) = 1 - \alpha = \mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha)} \leq T)$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „einseitig“ das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 22$ und $t_{(22,1-1\%)} = 2,508$, dass $\mathbb{P}(T \leq 2,508) = 1 - 1\% = 99\%$.

Zweiseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha/2)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha/2)} \leq T \leq t_{(n,1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „zweiseitig“ das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 5\%$, $n = 17$ und $t_{(17,1-2.5\%)} = 2,110$, dass $\mathbb{P}(-2,110 \leq T \leq 2,110) = 1 - 5\% = 95\%$.

Kritische Werte der χ^2-Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits-	1	2,71	3,84	6,63
Grade	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89

Hinweis zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei C eine Zufallsvariable, welche χ^2-verteilt ist mit n Freiheitsgraden. Das Quantil $c_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(C \leq c_{(n,1-\alpha)}) = 1-\alpha$, ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 26$ und $c_{(26,1-1\%)} = 45,64$, dass $\mathbb{P}(C \leq 45,64) = 1 - 1\% = 99\%$.

Lösung zu Aufgabe 1

Die Wahlentscheidung bei der vergangenen Bundestagswahl hat die Ausprägungen Partei A, Partei B, usw. Diese Ausprägungen sind keine Zahlen, daher ist das Merkmal nicht quantitativ.

Die monatlichen Ausgaben, der CO_2 Ausstoß und die Wartezeit sind Zahlen und daher handelt es sich hier um quantitative Merkmale.

Lösung zu Aufgabe 2

Bei der Darstellung handelt es sich um ein Säulendiagramm.

Ein Histogramm würde eine Klassierung voraussetzen, ein Kreissektorendiagramm ist kreisförmig und in einem Boxplot wäre zum Beispiel der Median sichtbar.

Lösung zu Aufgabe 3

Das vorliegende Merkmal ist nominal skaliert (es kann laut Aufgabenstellung nicht objektiv gereiht werden), daher ist die einzige zulässige Kennzahl der Modalwert. Hier wäre Partei C die Ausprägung mit der größten relativen und damit auch absoluten Häufigkeit.

Das arithmetische Mittel verlangt ein kardinal skaliertes Merkmal, der Median ein ordinal skaliertes Merkmal.

Lösung zu Aufgabe 4

Der Graph im Diagramm zeigt die relative kumulierte Häufigkeitsverteilung. Hierzu hilfreich ist die folgende Erweiterung der Tabelle der Aufgabenstellung:

Datenvolumen (in GB)	5	10	15	20	25	30	35
Anzahl Personen	1	4	8	7	10	6	4
absolute kumulierte Häufigkeit	1	5	13	20	30	36	40
relative kumulierte Häufigkeit	1/40	5/40	13/40	20/40	30/40	36/40	40/40
in %	2,5	12,5	32,5	50	75	90	100

Die letzte Zeile entspricht der y-Achse des Diagramms.

Für die absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung müsste die y-Skala der 3. Zeile der obigen Tabelle entsprechen.

Die mittlere quadratische Abweichung ist eine Zahl, welche nicht als Graph in einem zweidimensionalen Diagramm dargestellt werden kann.

Wäre die Bedingung explizit genannt, könnten die bedingten relativen Häufigkeiten als Stabdiagramm dargestellt werden. Dies ist hier aber nicht der Fall.

Lösung zu Aufgabe 5

Für den Median gilt:

Mindestens die Hälfte aller Beobachtungen sind mindestens so groß, wie der Median.

und

Mindestens die Hälfte aller Beobachtungen sind höchstens so groß, wie der Median.

Für 15 GB gilt: Es sind nur $1+4+8=13<20$ Beobachtungen höchstens so groß wie 15 GB. Damit ist 15 GB kein Median.

Für 20 GB gilt:
Es sind $1+4+8+7=20$ Beobachtungen höchstens so groß wie 20 GB.✓
Es sind $7+10+6+4=27>20$ Beobachtungen mindestens so groß wie 20 GB.✓

Für 22 GB gilt:
Es sind $1+4+8+7=20$ Beobachtungen höchstens so groß wie 22 GB.✓
Es sind $10+6+4=20$ Beobachtungen mindestens so groß wie 22 GB.✓

Für 25 GB gilt:
Es sind 1+4+8+7+10=30>20 Beobachtungen höchstens so groß wie 25 GB.✓
Es sind 10+6+4=20 Beobachtungen mindestens so groß wie 25 GB.✓

Lösung zu Aufgabe 6

Es gilt für zwei beliebige Zufallsereignisse A und B:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Daraus folgt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

mit $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$ gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} = \frac{1}{12}$$

Lösung zu Aufgabe 7

In der Aufgabenstellung sind die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{3}{4}$$

und die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = \frac{2}{5},\ \mathbb{P}(X = 0|Y = 1) = \frac{3}{5},\ \mathbb{P}(X = 1|Y = 0) = \frac{1}{5},\ \mathbb{P}(X = 0|Y = 0) = \frac{4}{5}$$

angegeben.

Gefragt ist nach dem Fall $X \cdot Y = 1$, was den Fall $X = Y = 1$ impliziert. Damit können wir die Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten wie folgt anwenden:

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1|Y = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1)$$

Mit den angegebenen Werten und $X = 1, Y = 1 \Leftrightarrow X \cdot Y = 1$ ergibt sich:

$$\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 10\%$$

Lösung zu Aufgabe 8

Mit

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

folgt

$$Var(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Lösung zu Aufgabe 9

Es gilt

$$Y = 8(X - 1) \geq 0 \Leftrightarrow X \geq 1$$

Gesucht ist also $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1)$.

Der Tabelle im Anhang entnehmen wir $\mathbb{P}(X \leq 1,00) = 0,8413$. Damit gilt

$$\mathbb{P}(Y \geq 0) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 = 15,87\%$$

Lösung zu Aufgabe 10

Da X gleichverteilt ist auf $[2, 5]$ führt die Bedingung $X \geq 3$ dazu, dass unter dieser Bedingung X gleichverteilt ist auf $[3,5]$. Der Erwartungswert einer gleichverteilten Zufallsvariable entspricht dem arithmetischen Mittel der beiden Intervallgrenzen. Daher gilt:

$$\mathbb{E}[X|X \geq 3] = \frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}5 = 4$$

Wer möchte, kann natürlich auch die bedingte Dichte

$$f_{X|X\geq 3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{falls } x > 5 \end{cases}$$

herleiten und mit dieser das Integral

$$\int_2^5 f_{X|X\geq 3}(x) \cdot x dx = \int_2^3 0 \cdot x dx + \int_3^5 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_3^5 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_3^5 = \frac{1}{4}(25-9) = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

berechnen.

Lösung zu Aufgabe 11

Ein Schätzer ist effizient, falls er 1. erwartungstreu ist und zweitens eine geringere Varianz (Streuung) aufweist, als alle anderen erwartungstreuen Schätzer. Daher ist der Satz „Effiziente Schätzen streuen innerhalb der erwartungstreuen Schätzer am wenigsten“ richtig.

Ein verzerrter Schätzer kann nicht effizient sein, deswegen müssen effiziente Schätzer notwendig erwartungstreu sein.

Lösung zu Aufgabe 12

Da die Zufallsvariablen normalverteilt sind und die Varianz mit 26 bekannt ist, muss das entsprechende Quantil der Standardnormalverteilung gesucht werden. Für $\alpha = 5\%$ suchen wir aus der Tabelle $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$.

Das Konfidenzintervall ergibt sich dann anhand der Formel

$$[\bar{x} - z_{0{,}975} \cdot \sqrt{26/20}, \bar{x} + z_{0{,}975} \cdot \sqrt{26/20}]$$

Mit $\sqrt{26/20} \approx 1{,}14$ und $1{,}96 \cdot 1{,}14 \approx 2{,}23$ ergibt sich das Intervall

$$[27 - 2{,}23; 27 + 2{,}23] = [24{,}77; 29{,}23]$$

Rundet man auf eine Nachkommastelle, ergibt sich

$$[24{,}8 \ ; \ 29{,}2]$$

Lösung zu Aufgabe 13

Die Zufallsvariablen sind zwar normalverteilt, aber die Varianz muss geschätzt werden. Der erwartungstreue Schätzer für die unbekannte Varianz ist die Stichprobenvarianz

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 22{,}8$$

Des Weiteren muss nun das Quantil der t-Verteilung aus der entsprechenden Tabelle gesucht werden: $t_{1-\frac{\alpha}{2},19} = 2{,}093$.

Die Formel für das Konfidenzintervall lautet nun:

$$[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},19} \cdot \sqrt{22{,}8/20} \ ; \ \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},19} \cdot \sqrt{22{,}8/20}]$$

$$= [27 - 2{,}093 \cdot 1{,}068 \ ; \ 27 + 2{,}093 \cdot 1{,}068]$$

$$= [27 - 2{,}23 \ ; \ 27 + 2{,}23] = [24{,}77 \ ; \ 29{,}23]$$

Lösung zu Aufgabe 14

Laut Formelsammlung ist die Formel für die T-Statistik

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Um den Wert dieser T-Statistik zu berechnen müssen wir den Wert der Zufallsvariablen $\bar{X}$, also $\bar{x} = 27$, den postulierten Parameter $\mu_0 = 25$ und den Wert der Zufallsvariablen S, also die Wurzel der Stichprobenvarianz $22{,}8$, sowie $n = 20$ einsetzen:

$$t = \frac{27 - 25}{\sqrt{22{,}8/20}}$$