

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer       Nachname \_\_\_\_\_

Studiengang \_\_\_\_\_ Vorname \_\_\_\_\_

**Bearbeitungshinweise:**

Diese Klausur besteht aus 14 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß Liste als Hilfsmittel zugelassen.

Bei 26 von maximal 42 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

**Viel Erfolg!**

Markierung:  Korrektur:

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 11	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 12	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 13	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Aufgabe 14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 1** (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

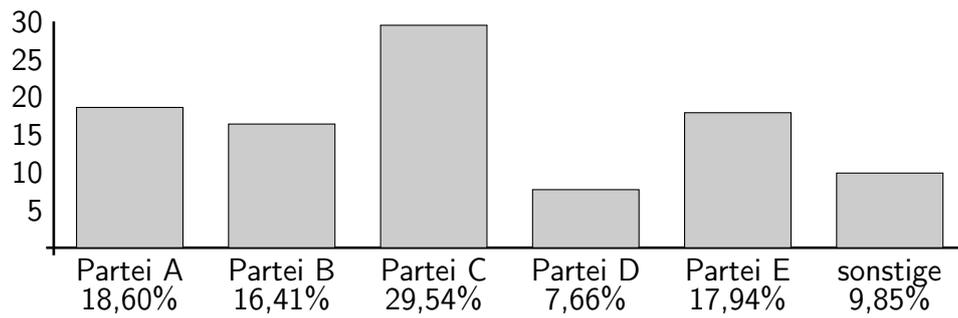
Welches der folgenden Merkmale ist nicht quantitativ?

- a) Ausstoß von CO<sub>2</sub> im Jahr
- b) Wartezeit auf Termin bei Arzt / Ärztin
- c) Wahlentscheidung bei der vergangenen Bundestagswahl
- d) Monatliche Ausgaben für Mobilität

## Aufgabe 2 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Das Wahlergebnis der Bundestagswahl 2025 eines Wahlraums in Uni-Nähe werden wie folgt präsentiert:

Stadt Dortmund – Ostenberg-Grundschule (32110)  
Wahl zum Deutschen Bundestag 23.02.2025 – Zweitstimmen



Die Parteinamen wurden durch neutrale Bezeichnungen ersetzt.

„Sonstige“ fasst alle Parteien zusammen, welche weniger als 5% der Zweitstimmen auf sich vereinigen konnten.

Um welche Darstellung handelt es sich bei obigem Diagramm?

- a) Kressektorendiagramm
- b) Boxplot
- c) Histogramm
- d) Säulendiagramm

### Aufgabe 3 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Das Wahlergebnis der Bundestagswahl 2025 eines Wahlraums (Nr. 32110) in Uni-Nähe lautet wie folgt:

Partei	Partei A	Partei B	Partei C	Partei D	Partei E	sonstige
Zweitstimmenanteil	18,60%	16,41%	29,54%	7,66%	17,94%	9,85%

Die Parteinamen wurden durch neutrale Bezeichnungen ersetzt.

„Sonstige“ fasst alle Parteien zusammen, welche weniger als 5% der Zweitstimmen auf sich vereinigen konnten.

Es sei angenommen, dass die fünf Parteien „Partei A“, „Partei B“, . . . , „Partei E“ und „sonstige“ nicht objektiv im politischen Spektrum gereiht werden können.

Welche der folgenden Kennzahlen ist in diesem Kontext sinnvoll?

- a) keine der angegebenen Kennzahlen ist in diesem Kontext sinnvoll.
- b) Das arithmetische Mittel
- c) Der Median
- d) Der Modalwert

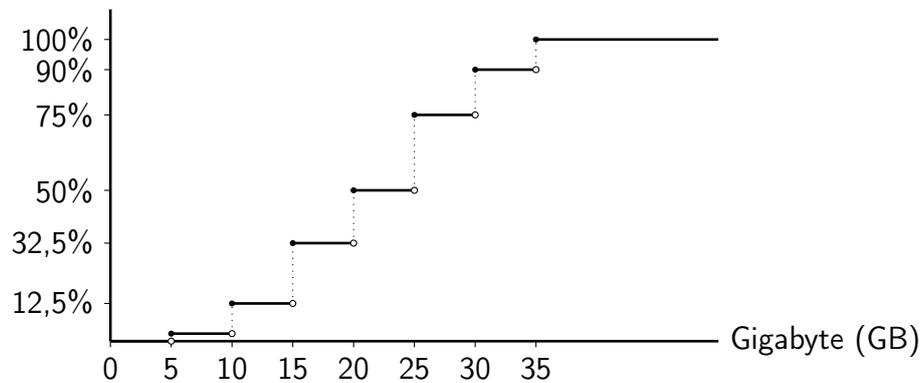
#### Aufgabe 4 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

40 zufällig ausgewählte Personen wurden nach dem Datenvolumen ihres Mobilfunkvertrags befragt.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Personen, deren Antworten 5, 10, 15, ... lauten:

Datenvolumen (in GB)	5	10	15	20	25	30	35
Anzahl Personen	1	4	8	7	10	6	4

Wie lautet die Funktion, welche durch den Graphen im folgenden Diagramm dargestellt wird?



- a) Mittlere quadratische Abweichung
- b) Bedingte relative Häufigkeit
- c) Absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung
- d) Relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

**Aufgabe 5** (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

40 zufällig ausgewählte Personen wurden nach dem Datenvolumen ihres Mobilfunkvertrags gefragt.

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Personen, deren Antworten 5, 10, 15, ... lauten:

Datenvolumen (in GB)	5	10	15	20	25	30	35
Anzahl Personen	1	4	8	7	10	6	4

Welche der folgenden Datenvolumen in Gigabyte ist kein Median der obigen Stichprobe?

- a) 25 GB
- b) 20 GB
- c) 15 GB
- d) 22 GB

**Aufgabe 6** (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es seien  $A$  und  $B$  zwei zufällige Ereignisse. Folgende Wahrscheinlichkeiten seien bekannt:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  eintritt, lautet  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ .
- Die Wahrscheinlichkeit, dass  $B$  eintritt, lautet  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ .
- Die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  oder  $B$  eintritt, lautet  $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}$ .

Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  und  $B$  eintreten?

- a)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{7}{12}$
- b)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$
- c)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$
- d)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$

**Aufgabe 7** (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen.

$Y$  nimmt mit Wahrscheinlichkeit 25% den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit 75% den Wert 0 an.

Wenn  $Y$  den Wert 1 annimmt, nimmt  $X$  mit Wahrscheinlichkeit 40% den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit 60% den Wert 0 an.

Wenn  $Y$  den Wert 0 annimmt, nimmt  $X$  mit Wahrscheinlichkeit 20% den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit 80% den Wert 0 an.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt  $X \cdot Y$  den Wert 1 annimmt?

a)  $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 25\%$

b)  $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 15\%$

c)  $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 10\%$

d)  $\mathbb{P}(X \cdot Y = 1) = 5\%$

**Aufgabe 8** (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen, wobei  $Y = X^2$ .

Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsvariablen gelte:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$$

Wie lautet die Varianz von  $X$ ?

- a)  $\text{Var}(X) = -\frac{1}{9}$
- b)  $\text{Var}(X) = \frac{2}{9}$
- c)  $\text{Var}(X) = \frac{1}{9}$
- d) Die Varianz lässt sich mit den angegebenen Informationen nicht berechnen.

**Aufgabe 9** (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es sei  $X$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und für die Zufallsvariable  $Y$  gelte  $Y = 8 \cdot (X - 1)$ .

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $Y \geq 0$ ?

*Hinweis:*

Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

Die Antwortmöglichkeiten sind auf zwei Nachkommastellen gerundet.

- a)  $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1,96$
- b)  $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 15,87\%$
- c)  $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 84,13\%$
- d)  $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 50,00\%$

**Aufgabe 10** (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Die Zufallsvariable  $X$  sei gleichverteilt auf dem Intervall von 2 bis 5, also  $X \sim \mathcal{U}(2, 5)$ .

Wie lautet der bedingte Erwartungswert von  $X$ , falls  $X \geq 3$ ?

a)  $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 5$

b)  $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 3,5$

c)  $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 3$

d)  $\mathbb{E}[X|X \geq 3] = 4$

**Aufgabe 11** (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- a) Effiziente Schätzer schätzen den wahren Parameter „im Mittel“ richtig.
- b) Effiziente Schätzer müssen nicht notwendig auch erwartungstreu sein.
- c) Effiziente Schätzer streuen innerhalb der erwartungstreuen Schätzer am wenigsten.
- d) Keine der anderen Aussagen ist richtig.

### Aufgabe 12 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Es sei angenommen, dass die Beobachtungen  $x_1, \dots, x_{20}$  Realisationen von identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien.

Es gelte  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 26)$  für  $i = 1, \dots, 20$ , wobei  $\mu$  den unbekanntem Erwartungswert von  $X_i$  bezeichne und die Varianz von  $X_i$  den Wert 26 habe.

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen  $x_1, \dots, x_{20}$  betrage  $\bar{x} = 27$ .

Wie lautet das symmetrische Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha = 95\%$ ?

*Hinweis:*

Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

Die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten wurden auf eine Nachkommastelle gerundet.

- a) [24,8 ; 29,2]
- b) ( $\infty$  ; 35,4)
- c) [17,0 ; 37,0]
- d) [13,9 ; 40,1]

### Aufgabe 13 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Es sei angenommen, dass die Beobachtungen  $x_1, \dots, x_{20}$  Realisationen von identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien.

Es gelte  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  für  $i = 1, \dots, 20$ , wobei  $\mu$  den unbekanntem Erwartungswert und  $\sigma^2$  die unbekanntem Varianz von  $X_i$  bezeichne.

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen  $x_1, \dots, x_{20}$  betrage  $\bar{x} = 27$ .

Die Stichprobenvarianz der Beobachtungen  $x_1, \dots, x_{20}$  betrage  $s^2 = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 22,8$ .

Wie lautet das symmetrische Konfidenzintervall für  $\mu$  zum Niveau  $1 - \alpha = 95\%$ ?

- a) [24,8 ; 29,2]
- b) [17,0 ; 37,0]
- c) [17,63 ; 36,37]
- d) [17,87 ; 36,13]

#### Aufgabe 14 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Es sei angenommen, dass die Beobachtungen  $x_1, \dots, x_{20}$  Realisationen von identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien.

Es gelte  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  für  $i = 1, \dots, 20$ , wobei  $\mu$  den unbekanntem Erwartungswert und  $\sigma^2$  die unbekanntem Varianz von  $X_i$  bezeichne.

Das arithmetische Mittel der Beobachtungen  $x_1, \dots, x_{20}$  betrage  $\bar{x} = 27$ .

Die Stichprobenvarianz betrage  $\frac{1}{19} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 22,8$ .

Wie lautet der Wert der anzuwendenden Teststatistik unter der Nullhypothese  $H_0: \mu = 25$ ?

a)  $t = \frac{27-2}{\sqrt{\frac{22,8}{20}}}$

b)  $t = \frac{27-25}{\frac{1}{19}\sqrt{22,8}}$

c)  $t = \frac{27-25}{\sqrt{\frac{22,8}{19}}}$

d)  $t = \frac{27-25}{\sqrt{\frac{22,8}{20}}}$







# Formelsammlung zu Teil 1 deskriptive Statistik

## Eindimensionale Daten (Kapitel 3)

$n$ : Stichprobenumfang,  $x_1, \dots, x_n$  Stichprobenwerte,  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  geordnete Stichprobenwerte

$a_j, j = 1, \dots, k$ : Ausprägungen,  $h(a_j)$  bzw.  $f(a_j) = \frac{h(a_j)}{n}$ : absolute bzw. relative Häufigkeit von  $a_j$

$H(x) = \sum_{a_j \leq x} h(a_j)$  bzw.  $F(x) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)$ : absolute bzw. relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

### Lageparameter

**Modalwert**  $x_{Mod}$  (beliebige Skalierung): für Ausprägung  $a = x_{Mod}$  gilt  $h(x_{Mod}) \geq h(a_j)$  für alle  $j = 1, \dots, k$

**Median**  $x_{Med}$  (ordinale Skalierung): Für  $a = x_{Med}$  gilt  $\sum_{a_j \leq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$  und  $\sum_{a_j \geq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$ .

**Arithmetisches Mittel** (kardinale Skalierung):  $\bar{x} = \sum_{j=1}^k a_j f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

**Geometrisches Mittel**  $x_{Geom}$  (kardinale Skalierung):  $x_{Geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$  (nur für  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ )

### Streuungsmaße (alle: kardinale Skalierung)

**Spannweite**:  $SP = \max_i x_i - \min_i x_i$

**Durchschnittliche Abweichung von**  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \lambda|$

**Mittlere quadratische Abweichung**  $s^2 = \sum_{j=1}^k (a_j - \bar{x})^2 \cdot f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

**Standardabweichung**  $s = \sqrt{s^2}$

### Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

### Konzentrationsmaße (alle: kardinale Skalierung)

**Variationskoeffizient**:  $V = s/\bar{x}$

**Lorenzkurve**: Polygonzug durch  $(u_k, v_k), k = 0, \dots, n$  mit  $u_0 = v_0 = 0, u_k = \frac{k}{n}, v_k = \frac{\sum_{i=1}^k x_{(i)}}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}}$  für  $k = 1, \dots, n$

**Gini-Koeffizient**:  $G = 2 \frac{\sum_{i=1}^n i \cdot x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i} - \frac{n+1}{n} = \sum_{k=2}^n u_{k-1} v_k - u_k v_{k-1}$

**Herfindahl-Index**:  $H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k} \right)^2$

### Mehrdimensionale Daten (Kapitel 4)

Merkmale  $X$  und  $Y$  mit Ausprägungen  $a_1, \dots, a_k$  und  $b_1, \dots, b_l$

**Abs. Häufigkeit** von  $(a_i, b_j)$ :  $h_{ij} = h(a_i, b_j)$ , **Randhäufigkeit** von  $a_i$  bzw.  $b_j$ :  $h_{i\bullet} = \sum_{j=1}^l h_{ij}, h_{\bullet j} = \sum_{i=1}^k h_{ij}$

**Relative Häufigkeiten**:  $f_{ij} = \frac{1}{n} h_{ij}, f_{i\bullet} = \frac{1}{n} h_{i\bullet}, f_{\bullet j} = \frac{1}{n} h_{\bullet j}$

**Bedingte relative Häufigkeiten**:  $f_1(a_i|b_j) = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}, f_2(b_j|a_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}}$

$X$  und  $Y$  **unabhängig**:  $f_1(a_i|b_j) = f_{i\bullet} \Leftrightarrow h_{ij} = \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n} \Leftrightarrow f_2(b_j|a_i) = f_{\bullet j}$  für alle  $i, j$

**Kovarianz von  $X$  und  $Y$**  (kardinale Skalierung):  $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) (= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y})$

**(Bravais-Pearson-)Korrelationskoeffizient von  $X$  und  $Y$**  (kardinale Skalierung):  $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$

**Rangkorrelation von Spearman** (ordinale Skalierung):  $r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^n (R(x_i) - \frac{n+1}{2})(R(y_i) - \frac{n+1}{2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R(x_i) - \frac{n+1}{2})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (R(y_i) - \frac{n+1}{2})^2}}$ ,

wobei  $R(x_i)$ : Rang von  $x_i, R(y_i)$ : Rang von  $y_i$

**Kontingenzkoeffizient** (beliebige Skalierung):  $K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$  mit  $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$ , wobei  $\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n}$

**Lineare Transformation**:  $y_i = a + b \cdot x_i, a, b \in \mathbb{R}$ :

$$y_{Mod} = a + b \cdot x_{Mod}, y_{Med} = a + b \cdot x_{Med}, \bar{y} = a + b \cdot \bar{x}, s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2, s_y = |b| \cdot s_x, s_{zy} = b \cdot s_{zx}, s_{xy} = \begin{cases} s_x \cdot s_y & , b \geq 0 \\ -s_x \cdot s_y & , b < 0 \end{cases}$$

### Indexzahlen (Kapitel 5)

# Güter:  $n$ , Preis  $p$  und Menge  $q$  von Gut  $i$  in Basis- bzw. Berichtsperiode:  $p_0(i)$  und  $q_0(i)$  bzw.  $p_t(i)$  und  $q_t(i)$

**Preisindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher**:  $P_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^n p_t(i) \cdot q_0(i)}{\sum_{i=1}^n p_0(i) \cdot q_0(i)}, P_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^n p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^n p_0(i) \cdot q_t(i)}, P_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$

**Mengenindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher**:  $Q_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^n p_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^n p_0(i) \cdot q_0(i)}, Q_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^n p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^n p_t(i) \cdot q_0(i)}, Q_{0t}^F = \sqrt{Q_{0t}^L \cdot Q_{0t}^P}$

## Formelsammlung zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\omega$ : Elem.-ereignis,  $\Omega$ : Ergebnismenge,  $A \subset \Omega$ : Ereignis,  $\mathcal{A}$ : Ereignissystem mit  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A}, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$

### Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten (Kapitel 7)

Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$  mit  $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$  (falls  $\mathbb{P}(B) > 0$ ).

Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit:  $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$ , wobei  $A_1, \dots, A_k$  Partition von  $\Omega$

Formel von Bayes:  $\mathbb{P}(A_j|B) = \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j) / \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$

Ereignisse  $A$  und  $B$  sind stochastisch unabhängig, falls:  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

### Zufallsvariablen und Verteilungen (Kapitel 8)

Zufallsvariable: Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , W'keit von Zufallsv.:  $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$  für  $B \subseteq \mathbb{R}$

Verteilungsfunktion:  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  und  $F(b) - F(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$  für  $a < b$ .

Diskrete Zufallsvariable: Falls Wertebereich  $\{x_1, x_2, \dots\}$  abzählbar.  $p_i = \mathbb{P}(X(\omega) = x_i)$

Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ , Verteilungsfunktion  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Gemeinsame W'keitsfunktion  $f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ , gem. V-funktion  $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$

Randwahrscheinlichkeiten:  $f_1(x) = \sum_{j=1}^m f(x, y_j), f_2(y) = \sum_{i=1}^k f(x_i, y)$

Randverteilungen:  $F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} f_1(x_i), F_2(y) = \sum_{y_j \leq y} f_2(y_j)$

Stetige Zufallsvariable: Falls Wertebereich überabzählbar, z.B.  $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq}$  oder  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ .

Dichtefunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  und  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Verteilungsfunktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \mathbb{P}(X \leq x)$

Gemeinsame Dichtefunktion  $f(x, y)$ , gemeinsame Verteilungsfunktion  $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, s) ds dt$

Randdichten:  $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$

Randverteilungen:  $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt, F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(s) ds$

Bedingte W'keits- bzw. Dichtefunktion:  $f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$  (falls  $f_1(x), f_2(y) > 0$ )

Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind stochastisch unabhängig, falls:  $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$  bzw.  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

### Verteilungsparameter (Kapitel 9)

$\alpha$ -Quantil  $x_\alpha$ :  $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha$  und  $\mathbb{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$ . Falls  $X$  stetig und  $f(x) > 0$  für alle  $x$ :  $F(x_\alpha) = \alpha$

Erwartungswert:  $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i f(x_i)$  (falls  $X$  diskret) bzw.  $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  (falls  $X$  stetig)

Rechenregeln:  $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y + c] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b \cdot \mathbb{E}[Y] + c$ . Falls  $X, Y$  unabhängig:  $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Bedingte Erwartungswerte:  $\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_i x_i f_1(x_i|y)$  (diskret) bzw.  $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x|y) dx$  (stetig)

Varianz  $\sigma^2$  und Standardabweichung  $\sigma$ :  $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2, \sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Kovarianz von  $X$  und  $Y$ :  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Korrelation von  $X$  und  $Y$ :  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \cdot \sqrt{\text{Var}(Y)}}$

Rechenregeln:  $\text{Var}(a + b \cdot X) = b^2 \text{Var}(X), \text{Var}(a + b \cdot X + c \cdot Y) = b^2 \text{Var}(X) + 2bc \text{Cov}(X, Y) + c^2 \text{Var}(Y)$

Ungleichung von Tschebyscheff:  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2}$

### Einige wichtige Verteilungen

Bernoulliverteilung,  $X \sim B(1, p)$ :  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  und  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \mathbb{E}[X] = p, \text{Var}(X) = p(1 - p)$

Binomialverteilung,  $X \sim B(n, p)$ :  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , wobei  $X_i \stackrel{iid}{\sim} B(1, p), \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, \mathbb{E}[X] = np, \text{Var}(X) = np(1 - p)$

Poissonverteilung,  $X \sim P(\lambda)$ :  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$  für  $k = 0, 1, 2, \dots, \mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \lambda$

Gleichverteilung  $X \sim U(a, b)$ :  $f(x) = \frac{1}{b-a}, F(x) = \frac{x-a}{b-a}$  für  $a \leq x \leq b, \mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \text{Var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Normalverteilung  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \mathbb{E}[X] = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2$

Standardnormalverteilung  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  mit Dichte  $\phi$  und Verteilungsfunktion  $\Phi$  (siehe Anhang).

Für  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  gilt  $F(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  (Standardisierung:  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ).

### Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz (Kapitel 10)

$X_i$  unabhängig und identisch verteilt (iid) mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty, \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Schwaches Gesetz der großen Zahlen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1$  für alle  $\epsilon > 0$ .

Zentraler Grenzwertsatz:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

## Formelsammlung zu Teil 3 Inferenzstatistik

### Grundlagen der Induktiven Statistik (Kapitel 11) (mit $X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ )

#### Wichtige Testverteilungen

$\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden:  $C \sim \chi^2(n)$ ,  $C = \sum_{i=1}^n X_i^2$  mit  $X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ .  $\mathbb{E}[C] = n$ ,  $\text{Var}(C) = 2n$   
 $t$ -Vert. mit  $n$  FG:  $T = \frac{X}{\sqrt{C/n}} \sim t(n)$  mit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $C \sim \chi^2(n)$ ,  $X, C$  unabh.  $\mathbb{E}[T] = 0$ ,  $\text{Var}(T) = \frac{n}{n-2}$ .

#### Wichtige Stichprobenfunktionen

Stichprobenmittel:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ , Gauß-Statistik:  $G = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Mittlere quadratische Abweichung bzgl.  $\mu$ :  $M^2(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ ,  $\mathbb{E}[M^2(\mu)] = \sigma^2$ ,  $\frac{n}{\sigma^2} M^2(\mu) \sim \chi^2(n)$

Mittlere quadratische Abweichung:  $M^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,  $\mathbb{E}[M^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$

Stichprobenvarianz:  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,  $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$ ,  $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$

$t$ -Statistik:  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

#### Punktschätzung (Kapitel 12)

Schätzer für unbekanntem Parameter  $\theta$ : Funktion  $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$  (mit  $\Theta$ : Menge aller möglichen Parameter)

Erwartungstreue:  $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$  für alle  $\theta \in \Theta$ , Effizienz:  $\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\tilde{\theta})$  für alle erwartungstreuen Schätzer  $\tilde{\theta}$

Konsistenz:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0$  für alle  $\epsilon > 0$ .

Kleinste Quadrate Schätzer  $\hat{\theta}^{LS}$  für  $\theta = \mu$ :  $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$  (minimiert  $\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta})^2$ .  $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$  ist e-treu und effizient.)

#### Intervall-Schätzung (Kapitel 13)

$\alpha$ -Quantil  $z_\alpha$  für  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ :  $\Phi(z_\alpha) = \alpha$ . Symmetrie  $\Rightarrow \Phi(-z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = \Phi(z_{1-\alpha})$

Einseitige Konfidenzintervalle für  $\mu$  bei  $\sigma^2$  bekannt:  $(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}]$  bzw.  $(\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \infty]$

Zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\mu$  bei  $\sigma^2$  bekannt:  $[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}]$

$\alpha$ -Quantil  $t_{(n-1, \alpha)}$  für  $T \sim t(n-1)$ :  $\mathbb{P}(T \leq t_{(n-1, \alpha)}) = \alpha$

Eins. Konfidenzintervalle für  $\mu$  bei  $\sigma^2$  unbekannt:  $(-\infty, \bar{X} + t_{(n-1, 1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}]$  bzw.  $(\bar{X} - t_{(n-1, 1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}, \infty]$

Zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\mu$  bei  $\sigma^2$  unbekannt:  $[\bar{X} - t_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}]$

$\alpha$ -Quantil  $c_{(n-1, \alpha)}$  für  $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$ :  $\mathbb{P}(\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \leq c_{(n-1, \alpha)}) = \alpha$

Zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\sigma^2$ :  $[\frac{n-1}{c_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}} S^2, \frac{n-1}{c_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}} S^2]$

#### Signifikanztests (Kapitel 14)

Gaußtest:  $X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  unbekannt,  $\sigma^2$  bekannt. Teststatistik:  $G = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ . Lehne  $H_0 : \mu = \mu_0$  ab, falls  $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ . Lehne  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  ab, falls  $g > z_{1-\alpha}$ . Lehne  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  ab, falls  $g < -z_{1-\alpha}$

Binomialtest:  $X_i \stackrel{iid}{\sim} B(n, p)$ ,  $p$  unbek. Teststat.:  $V = \sum_{i=1}^n X_i$ . Größtes  $c_1$  mit  $\mathbb{P}(X \leq c_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ ,  $\mathbb{P}(X \leq c_1 + 1) > \frac{\alpha}{2}$ . Kleinstes  $c_2$  mit  $\mathbb{P}(X \geq c_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ ,  $\mathbb{P}(X \geq c_2 - 1) > \frac{\alpha}{2}$ . Lehne  $H_0 : p = p_0$  ab, falls  $v < c_1 \vee v > c_2$ .

$t$ -Test:  $X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  unbekannt. Teststatistik:  $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ . Lehne  $H_0 : \mu = \mu_0$  ab, falls  $t > t_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}$ .

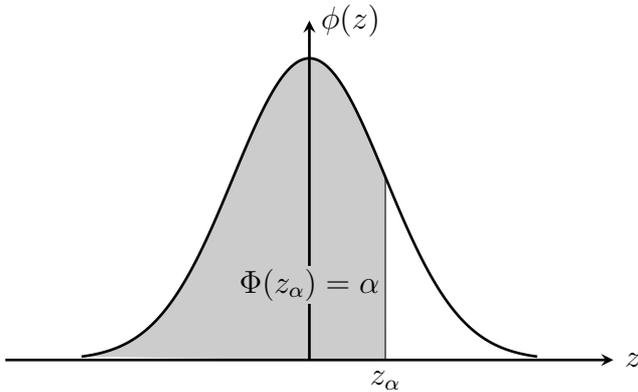
Lehne  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  ab, falls  $t > t_{(n-1, 1-\alpha)}$ . Lehne  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  ab, falls  $t < -t_{(n-1, 1-\alpha)}$ .

Approximativer Gaußtest:  $X_i$  iid bel. vert.,  $\mu, \sigma^2$  unbek.,  $n \geq 30$ . Teststatistik:  $T$ . Testentsch.: wie Gauß-Test.

$\chi^2$ -Test:  $X_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  unbekannt. Teststatistik:  $V = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S^2$ . Lehne  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  ab, falls  $v < c_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}$  oder  $v > c_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}$ . Lehne  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$  ab, falls  $v > c_{(n-1, 1-\alpha)}$ . Lehne  $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$  ab, falls  $v < c_{(n-1, \alpha)}$ .

Kontingenztest:  $H_0 : X, Y$  unabhängig. Teststatistik:  $\chi^2$  aus Kapitel 4. Lehne  $H_0$  ab, falls  $\chi^2 > c_{(m, 1-\alpha)}$ , wobei  $m = (\# \text{ Auspr. von } X - 1)(\# \text{ Auspr. von } Y - 1)$

# Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

*Hinweis zur Benutzung dieser Tabelle:*

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z$  einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als  $x+y$ , ist in der Zeile  $x$  und Spalte  $y$  abzulesen. Zum Beispiel gilt:  $\mathbb{P}(Z \leq 1,5+0,06) = \Phi(1,56) = 0,9406$ , also 94,06%.

Für Wahrscheinlichkeiten  $\alpha < 0,5$  kann  $z_\alpha = 1 - z_{1-\alpha}$  benutzt werden.

# Kritische Werte der $t$ -Verteilung

		Signifikanzniveau				
		10%	5%	2,5%	1%	0,5%
einseitig:	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	
zweiseitig:	20%	10%	5%	2%	1%	
Freiheitsgrade	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	

*Hinweise zur Nutzung dieser Tabelle:*

Es sei  $T$  eine Zufallsvariable, welche  $t$ -verteilt ist mit  $n$  Freiheitsgraden.

*Einseitig:* Das Quantil  $t_{(n,1-\alpha)}$ , für welches gilt  $\mathbb{P}(T \leq t_{(n,1-\alpha)}) = 1 - \alpha = \mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha)} \leq T)$  ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile  $n$  und in der Spalte, welche unter „einseitig“ das Signifikanzniveau  $\alpha$  angibt. Zum Beispiel gilt für  $\alpha = 1\%$ ,  $n = 22$  und  $t_{(22,1-1\%)} = 2,508$ , dass  $\mathbb{P}(T \leq 2,508) = 1 - 1\% = 99\%$ .

*Zweiseitig:* Das Quantil  $t_{(n,1-\alpha/2)}$ , für welches gilt  $\mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha/2)} \leq T \leq t_{(n,1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha$  ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile  $n$  und in der Spalte, welche unter „zweiseitig“ das Signifikanzniveau  $\alpha$  angibt. Zum Beispiel gilt für  $\alpha = 5\%$ ,  $n = 17$  und  $t_{(17,1-2.5\%)} = 2,110$ , dass  $\mathbb{P}(-2,110 \leq T \leq 2,110) = 1 - 5\% = 95\%$ .

## Kritische Werte der $\chi^2$ -Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits- Grade	1	2,71	3,84	6,63
	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89

*Hinweis zur Nutzung dieser Tabelle:*

Es sei  $C$  eine Zufallsvariable, welche  $\chi^2$ -verteilt ist mit  $n$  Freiheitsgraden. Das Quantil  $c_{(n,1-\alpha)}$ , für welches gilt  $\mathbb{P}(C \leq c_{(n,1-\alpha)}) = 1-\alpha$ , ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile  $n$  und in der Spalte, welche das Signifikanzniveau  $\alpha$  angibt. Zum Beispiel gilt für  $\alpha = 1\%$ ,  $n = 26$  und  $c_{(26,1-1\%)} = 45,64$ , dass  $\mathbb{P}(C \leq 45,64) = 1 - 1\% = 99\%$ .