Statistik

Technische Universität Dortmund	Fakultät Wirtschaftswissenschaften	5. Februar 2025

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname ____________

Studiengang ____________ Vorname ____________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 14 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß Liste als Hilfsmittel zugelassen.

Bei 26 von maximal 42 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 11	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 12	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 13	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 14	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐					

Aufgabe 1 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Welches der folgenden Merkmale ist diskret?

a) Anzahl der Personen im Haushalt

b) Entfernung des Haushalts zur nächsten S-Bahn Station

c) Durchschnittliche Anfahrtszeit vom Haushalt zum Arbeitsplatz

d) Kriminalitätsrate im Bereich der Postleitzahl des Haushalts

Aufgabe 2 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Welches der folgenden Merkmale hat eine kardinale Skalierung?

a) Ausgaben für Mobilfunkanbieter

b) Religionszugehörigkeit

c) Geschlecht

d) Platzierung beim Campuslauf

Aufgabe 3 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Die folgende Tabelle zeigt, wie oft wie viele der vier Aufzüge des Mathetowers im Jahr 2024 defekt waren:

Anzahl defekte Aufzüge	0	1	2	3	4
Anzahl Tage	227	104	26	9	0

Wie lautet des arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Anzahl der defekten Aufzüge pro Tag?

Hinweis: Das Jahr 2024 war ein Schaltjahr und hatte 366 Tage.

a) $\bar{x} = 0,5$

b) $\bar{x} = 227$

c) $\bar{x} = 0$

d) $\bar{x} = 1$

Aufgabe 4 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Die folgende Tabelle zeigt, wie oft wie viele der vier Aufzüge des Mathetowers im Jahr 2024 defekt waren:

Anzahl defekte Aufzüge	0	1	2	3	4
Anzahl Tage	227	104	26	9	0

Wie lautet der Median x_{Med} der Anzahl der defekten Aufzüge pro Tag?

Hinweis: Das Jahr 2024 war ein Schaltjahr und hatte 366 Tage.

a) $x_{\text{Med}} = 0$

b) $x_{\text{Med}} = 0,5$

c) $x_{\text{Med}} = 227$

d) $x_{\text{Med}} = 1$

Aufgabe 5 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Die folgende Tabelle zeigt, wie oft wie viele der vier Aufzüge des Mathetowers im Jahr 2024 defekt waren:

Anzahl defekte Aufzüge	0	1	2	3	4
Anzahl Tage	227	104	26	9	0

Welche der folgenden Aussagen ist in Bezug auf die relative kumulierte Häufigkeitsverteilung F der obigen Stichprobe richtig?

Hinweis: Das Jahr 2024 war ein Schaltjahr und hatte 366 Tage.

Die Werte der Antworten wurden auf zwei Nachkommastellen gerundet.

a) $F(0) = 0,62$

b) $F(1) = 0,28$

c) $F(2) = 0,07$

d) $F(3) = 0,02$

Aufgabe 6 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Eine Klausur zum Fach Parapsychologie enthalte Aufgaben mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten a) bis d), von denen jeweils genau eine zutreffend sei.

Bei genau 4 Aufgaben von den ersten 10 Aufgaben der Klausur zu Parapsychologie sei die Antwort a) zutreffend.

Es werden nun zwei verschiedene Aufgaben der ersten 10 Aufgaben mit gleicher Wahrscheinlichkeit unabhängig ausgewählt.

Wie lautet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: „Bei mindestens einer der beiden ausgewählten Aufgaben ist Antwort a) zutreffend“?

a) $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$

b) $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$

c) $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{9}$

d) $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{10}$

Aufgabe 7 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Eine Klausur zum Fach Parapsychologie enthalte 12 Aufgaben. Sechs dieser Aufgaben seien zu Teil 1 Außersinnliche Wahrnehmung, vier der 12 Aufgaben seien zu Teil 2 Psychokinese und die restlichen zwei Aufgaben seien zu Teil 3 Präkognition. Die Reihenfolge der Aufgaben in der Klausur sei zufällig, wobei jede mögliche Reihenfolge die gleiche Wahrscheinlichkeit habe.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Aufgaben zum gleichen Teil der Vorlesung gehören?

a) $1/3$

b) $5/22$

c) $1/11$

d) $1/66$

Aufgabe 8 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Eine Klausur zum Fach Parapsychologie enthalte Aufgaben mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten a) bis d), von denen jeweils genau eine zutreffend sei.

Ein Student behauptet durch Berührung der jeweiligen Aufgabenstellung mit der Stirn jeweils zwei der vier Antworten als unzutreffend ausschließen zu können.

Es sei angenommen, dass er im Gegensatz zu seiner Behauptung bei jeder Aufgabe unabhängig rät, wobei er jeder der vier Antworten die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei den ersten 10 Aufgaben mindestens fünfmal jeweils zwei unzutreffende Antworten ausschließt?

In den Antwortmöglichkeiten dieser Aufgabe bezeichne X die Anzahl der Aufgaben, bei denen der Student nicht die zutreffende Antwort ausschließt.

Hinweis: Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $n = 10$ lauten:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{n}{k}$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten sind auf eine Nachkommastelle gerundet.

a) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 62,3\%$

b) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 37,7\%$

c) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 73,3\%$

d) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 26,7\%$

Aufgabe 9 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es sei Y eine Zufallsvariable mit $Y \sim \mathcal{N}(6, 16)$ und es gelte $X = \frac{1}{2}Y$. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 0 und 2 liegt?

Hinweis:
Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten sind auf eine Nachkommastelle gerundet.

a) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 24,2\%$

b) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 93,3\%$

c) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 69,2\%$

d) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 73,6\%$

Aufgabe 10 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Für die beiden unabhängigen Zufallsvariablen Z und Y gelte $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(6,16)$.

Wie lautet $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4, -1 \leq Z \leq 1)$?

Hinweis:
Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten sind auf eine Nachkommastelle gerundet.

a) $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4, -1 \leq Z \leq 1) = 16,5\%$

b) $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4, -1 \leq Z \leq 1) = 24,2\%$

c) $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4, -1 \leq Z \leq 1) = 93,3\%$

d) $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4, -1 \leq Z \leq 1) = 68,3\%$

Aufgabe 11 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Die vier Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und X_4 seien unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ. Welche der angegebenen Schätzefunktionen ist nicht erwartungstreu für μ?

a) $X_1 - X_2 + X_3 - X_4$

b) $2X_1 - X_2 + X_3 - X_4$

c) $(X_1 + X_4)/2$

d) $4X_2 - X_1 - X_3 - X_4$

Aufgabe 12 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Margot hat 1000 Euro gewonnen und investiert diese in ein Projekt. Nach der Projektlaufzeit erhält sie den Betrag $Z = 1000 \cdot (1 + X)$ zurück, wobei X normalverteilt ist mit Erwartungswert $E[X] = 0,07$ und Varianz $Var(X) = 0,0025$.

Margot sucht nun einen kritischen Wert c für den gilt:

$$\mathbb{P}(Z \geq c) = 99\%$$

Wie lautet die Formel für den kritischen Wert c?

In den Antwortmöglichkeiten bezeichnet x_α das α-Quantil, für welches gilt: $\Phi(x_\alpha) = \alpha$.

Hinweis:

Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

a) $c = -x_{0,99} \cdot 50 + 1070$

b) $c = x_{0,99} \cdot 25 + 1070$

c) $c = -x_{0,01} \cdot 50 + 1070$

d) Der Wert c lässt sich mit den angegebenen Informationen nicht berechnen.

Aufgabe 13 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Für $n = 16$ identisch und unabhängig normalverteilte Zufallsvariablen X_i sei die Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Das arithmetische Mittel der Stichprobe betrage $\bar{x} = 373,4$.

Es sei bekannt, dass die Zufallsvariablen X_i die Varianz $Var(X_i) = 100$ haben.

Welches der folgenden Intervalle ist ein symmetrisches Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ für den unbekannten Erwartungswert $E[X_i] = \mu$?

a) $[368,5; 378,3]$

b) $[353,8; 393]$

c) $(-\infty; 377,525]$

d) $[369,275; 377,525]$

Aufgabe 14 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Für $n = 16$ identisch und unabhängig normalverteilte Zufallsvariablen X_i sei die Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Das arithmetische Mittel der Stichprobe beträgt $\bar{x} = 373,4$.

Es sei bekannt, dass die Zufallsvariablen X_i die Varianz $Var(X_i) = 100$ haben.

Welche der folgenden Nullhypothesen können Sie mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ ablehnen?

a) $H_0: \ \mu = 380$

b) $H_0: \ \mu \leq 380$

c) $H_0: \ \mu = 375$

d) Keine der Nullhypothesen kann zum angegebenen Signifikanzniveau α abgelehnt werden.

Formelsammlung zu Teil 1 deskriptive Statistik

Eindimensionale Daten (Kapitel 3)

n: Stichprobenumfang, $x_1, \dots, x_n$ Stichprobenwerte, $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ geordnete Stichprobenwerte
$a_j,\ j = 1, \dots, k$: Ausprägungen, $h(a_j)$ bzw. $f(a_j) = \frac{h(a_j)}{n}$: absolute bzw. relative Häufigkeit von a_j
$H(x) = \sum_{a_j \leq x} h(a_j)$ bzw. $F(x) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)$: absolute bzw. relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

Lageparameter

Modalwert x_{Mod} (beliebige Skalierung): für Ausprägung $a = x_{Mod}$ gilt $h(x_{Mod}) \geq h(a_j)$ für alle $j = 1, \dots, k$
Median x_{Med} (ordinale Skalierung): Für $a = x_{Med}$ gilt $\sum_{a_j \leq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$ und $\sum_{a_j \geq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$.
Arithmetisches Mittel (kardinale Skalierung): $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} a_j f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Geometrisches Mittel x_{Geom} (kardinale Skalierung): $x_{Geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}$ (nur für $x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n$)

Streuungsmaße (alle: kardinale Skalierung)

Spannweite: $SP = \max_i x_i - \min_i x_i$
Durchschnittliche Abweichung von $\lambda \in \mathbb{R}$: $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \lambda|$
Mittlere quadratische Abweichung $s^2 = \sum_{j=1}^{k} (a_j - \bar{x})^2 \cdot f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Konzentrationsmaße (alle: kardinale Skalierung)

Variationskoeffizient: $V = s/\bar{x}$
Lorenzkurve: Polygonzug durch (u_k, v_k), $k = 0, \dots, n$ mit $u_0 = v_0 = 0$, $u_k = \frac{k}{n}$, $v_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ für $k = 1, \dots, n$
Gini-Koeffizient: $G = 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n+1}{n} = \sum_{k=2}^{n} u_{k-1} v_k - u_k v_{k-1}$
Herfindahl-Index: $H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right)^2$

Mehrdimensionale Daten (Kapitel 4)

Merkmale X und Y mit Ausprägungen $a_1, \dots, a_k$ und $b_1, \dots, b_l$
Abs. Häufigkeit von (a_i, b_j): $h_{ij} = h(a_i, b_j)$, *Randhäufigkeit von* a_i *bzw.* b_j: $h_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij}$, $h_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$
Relative Häufigkeiten: $f_{ij} = \frac{1}{n} h_{ij}$, $f_{i\bullet} = \frac{1}{n} h_{i\bullet}$, $f_{\bullet j} = \frac{1}{n} h_{\bullet j}$
Bedingte relative Häufigkeiten: $f_1(a_i|b_j) = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}$, $f_2(b_j|a_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}}$
X und Y unabhängig: $f_1(a_i|b_j) = f_{i\bullet} \Leftrightarrow h_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n} \Leftrightarrow f_2(b_j|a_i) = f_{\bullet j}$ für alle i, j
Kovarianz von X und Y (kardinale Skalierung): $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $(= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y})$
(Bravais-Pearson-)Korrelationskoeffizient von X und Y (kardinale Skalierung): $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$
Rangkorrelation von Spearman (ordinale Skalierung): $r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})(R(y_i) - \frac{n+1}{2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(y_i) - \frac{n+1}{2})^2}}$,
wobei $R(x_i)$: Rang von x_i, $R(y_i)$: Rang von y_i
Kontingenzkoeffizient (beliebige Skalierung): $K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$ mit $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$, wobei $\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}$

Lineare Transformation: $y_i = a + b \cdot x_i$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$y_{Mod} = a + b \cdot x_{Mod},\ y_{Med} = a + b \cdot x_{Med},\ \bar{y} = a + b \cdot \bar{x},\ s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2,\ s_y = |b| \cdot s_x,\ s_{zy} = b \cdot s_{zx},\ s_{xy} = \begin{cases} s_x \cdot s_y & , b \geq 0 \\ -s_x \cdot s_y & , b < 0 \end{cases}$$

Indexzahlen (Kapitel 5)

\# Güter: n, Preis p und Menge q von Gut i in Basis- bzw. Berichtsperiode: $p_0(i)$ und $q_0(i)$ bzw. $p_t(i)$ und $q_t(i)$
Preisindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $P_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $P_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}$, $P_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$
Mengenindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $Q_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$

Formelsammlung zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

ω: Elem.-ereignis, Ω: Ergebnismenge, $A \subset \Omega$: Ereignis, $\mathcal{A}$: Ereignissystem mit $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A}, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten (Kapitel 7)

Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq}$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (falls $\mathbb{P}(B) > 0$).
Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$, wobei $A_1, \ldots, A_k$ Partition von Ω
Formel von Bayes: $\mathbb{P}(A_j|B) = \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j) / \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$
Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, falls: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Zufallsvariablen und Verteilungen (Kapitel 8)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *W'keit von Zufallsv.*: $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ für $B \subseteq \mathbb{R}$
Verteilungsfunktion: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ und $F(b) - F(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$ für $a < b$.
Diskrete Zufallsvariable: Falls Wertebereich $\{x_1, x_2, \ldots\}$ abzählbar. $p_i = \mathbb{P}(X(\omega) = x_i)$
Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$, *Verteilungsfunktion* $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
Gemeinsame W'keitsfunktion $f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, *gem. V-funktion* $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$
Randwahrscheinlichkeiten: $f_1(x) = \sum_{j=1}^{m} f(x, y_j)$, $f_2(y) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y)$
Randverteilungen: $F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} f_1(x_i)$, $F_2(y) = \sum_{y_j \leq y} f_2(y_j)$
Stetige Zufallsvariable: Falls Wertebereich überabzählbar, z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq}$ oder $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \mathbb{P}(X \leq x)$
Gemeinsame Dichtefunktion $f(x, y)$, gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t, s)dsdt$
Randdichten: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$
Randverteilungen: $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt$, $F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(s)ds$
Bedingte W'keits- bzw. Dichtefunktion: $f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$, $f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ (falls $f_1(x), f_2(y) > 0$)
Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig, falls: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ bzw. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

Verteilungsparameter (Kapitel 9)

α-Quantil x_α: $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha$ und $\mathbb{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$. Falls X stetig und $f(x) > 0$ für alle x: $F(x_\alpha) = \alpha$
Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i f(x_i)$ (falls X diskret) bzw. $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ (falls X stetig)
Rechenregeln: $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y + c] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b \cdot \mathbb{E}[Y] + c$. Falls X, Y unabhängig: $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Bedingte Erwartungswerte: $\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_i x_i f_1(x_i|y)$ (diskret) bzw. $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(t|y)dt$ (stetig)
Varianz σ^2 und Standardabweichung σ: $\sigma^2 = Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
Kovarianz von X und Y: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Korrelation von X und Y: $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$
Rechenregeln: $Var(a + b \cdot X) = b^2 Var(X)$, $Var(a + b \cdot X + c \cdot Y) = b^2 Var(X) + 2bcCov(X, Y) + c^2 Var(Y)$
Ungleichung von Tschebyscheff: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$

Einige wichtige Verteilungen

Bernoulliverteilung, $X \sim B(1, p)$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, $\mathbb{E}[X] = p$, $Var(X) = p(1 - p)$
Binomialverteilung, $X \sim B(n, p)$: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_i \overset{iid}{\sim} B(1, p)$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, $\mathbb{E}[X] = np$, $Var(X) = np(1 - p)$
Poissonverteilung, $X \sim P(\lambda)$: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$
Gleichverteilung $X \sim U(a, b)$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ für $a \leq x \leq b$, $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $\mathbb{E}[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$
Standardnormalverteilung $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ mit Dichte ϕ und Verteilungsfunktion Φ (siehe Anhang).
Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $F(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (*Standardisierung*: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$).

Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz (Kapitel 10)

X_i unabhängig und identisch verteilt (iid) mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1$ für alle $\epsilon > 0$.
Zentraler Grenzwertsatz: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

Formelsammlung zu Teil 3 Inferenzstatistik

Grundlagen der Induktiven Statistik (Kapitel 11) (mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$)

Wichtige Testverteilungen

χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden: $C \sim \chi^2(n)$, $C = \sum_{i=1}^n X_i^2$ mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. $\mathbb{E}[C] = n$, $Var(C) = 2n$
t-Vert. mit n FG: $T = \frac{X}{\sqrt{C/n}} \sim t(n)$ mit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $C \sim \chi^2(n)$, X, C unabh. $\mathbb{E}[T] = 0$, $Var(T) = \frac{n}{n-2}$.

Wichtige Stichprobenfunktionen

Stichprobenmittel: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, *Gauß-Statistik*: $G = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Mittlere quadratische Abweichung bzgl. μ: $M^2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, $\mathbb{E}[M^2(\mu)] = \sigma^2$, $\frac{n}{\sigma^2}M^2(\mu) \sim \chi^2(n)$
Mittlere quadratische Abweichung: $M^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[M^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
Stichprobenvarianz: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$, $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$
t-Statistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Punktschätzung (Kapitel 12)

Schätzer für unbekannten Parameter θ: Funktion $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \to \Theta$ (mit Θ: Menge aller möglichen Parameter)
Erwartungstreue: $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ für alle $\theta \in \Theta$, *Effizienz*: $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\tilde{\theta})$ für alle erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}$
Konsistenz: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon\right) = 0$ für alle $\epsilon > 0$.
Kleinste Quadrate Schätzer $\hat{\theta}^{LS}$ für $\theta = \mu$: $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ (minimiert $\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta})^2$. $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ ist e-treu und effizient.)

Intervall-Schätzung (Kapitel 13)

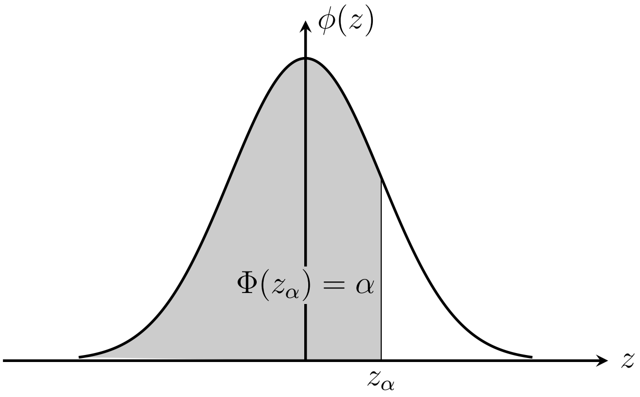
α-Quantil z_α für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Symmetrie $\Rightarrow \Phi(-z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = \Phi(z_{1-\alpha})$
Einseitige Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 bekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 bekannt: $\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $t_{(n-1,\alpha)}$ für $T \sim t(n-1)$: $\mathbb{P}(T \leq t_{(n-1,\alpha)}) = \alpha$
Eins. Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 unbekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 unbekannt: $\left[\bar{X} - t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $c_{(n-1,\alpha)}$ für $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$: $\mathbb{P}\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \leq c_{(n-1,\alpha)}\right) = \alpha$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für σ^2: $\left[\frac{n-1}{c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}S^2, \frac{n-1}{c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}S^2\right]$

Signifikanztests (Kapitel 14)

Gaußtest: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, μ unbekannt, σ^2 bekannt. Teststatistik: $G = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Lehne $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ab, falls $g > z_{1-\alpha}$. Lehne $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ab, falls $g < -z_{1-\alpha}$
Binomialtest: $X_i \overset{iid}{\sim} B(n,p)$, p unbek. Teststat.: $V = \sum_{i=1}^n X_i$. Größtes c_1 mit $\mathbb{P}(X \leq c_1) \leq \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \leq c_1 + 1) > \frac{\alpha}{2}$. Kleinstes c_2 mit $\mathbb{P}(X \geq c_2) \leq \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \geq c_2 - 1) > \frac{\alpha}{2}$. Lehne $H_0 : p = p_0$ ab, falls $v < c_1 \vee v > c_2$.
t-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $|t| > t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ab, falls $t > t_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ab, falls $t < -t_{(n-1,1-\alpha)}$.
Approximativer Gaußtest: X_i iid bel. vert., μ, σ^2 unbek., $n \geq 30$. Teststatistik: T. Testentsch.: wie Gauß-Test.
χ^2-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $V = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2}S^2$. Lehne $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}$ oder $v > c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ab, falls $v > c_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\alpha)}$.
Kontingenztest: $H_0 : X, Y$ unabhängig. Teststatistik: χ^2 aus Kapitel 4. Lehne H_0 ab, falls $\chi^2 > c_{(m,1-\alpha)}$, wobei $m = (\#\text{ Auspr. von } X - 1)(\#\text{ Auspr. von } Y - 1)$

Je nach Fortschritt der Vorlesung können hier noch weitere Formeln platziert werden.

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Hinweis zur Benutzung dieser Tabelle:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als $x+y$, ist in der Zeile x und Spalte y abzulesen. Zum Beispiel gilt: $\mathbb{P}(Z \leq 1,5+0,06) = \Phi(1,56) = 0,9406$, also 94,06%.

Für Wahrscheinlichkeiten $\alpha < 0,5$ kann $z_\alpha = 1 - z_{1-\alpha}$ benutzt werden.

Kritische Werte der t-Verteilung

		Signifikanzniveau				
	einseitig:	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
	zweiseitig:	20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits-	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
grade	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
	120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
	∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Hinweise zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei T eine Zufallsvariable, welche t-verteilt ist mit n Freiheitsgraden.

Einseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(T \leq t_{(n,1-\alpha)}) = 1 - \alpha = \mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha)} \leq T)$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „einseitig" das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 22$ und $t_{(22,1-1\%)} = 2,508$, dass $\mathbb{P}(T \leq 2,508) = 1 - 1\% = 99\%$.

Zweiseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha/2)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha/2)} \leq T \leq t_{(n,1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „zweiseitig" das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 5\%$, $n = 17$ und $t_{(17,1-2.5\%)} = 2,110$, dass $\mathbb{P}(-2,110 \leq T \leq 2,110) = 1 - 5\% = 95\%$.

Kritische Werte der χ^2-Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits-	1	2,71	3,84	6,63
Grade	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89

Hinweis zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei C eine Zufallsvariable, welche χ^2-verteilt ist mit n Freiheitsgraden. Das Quantil $c_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(C \leq c_{(n,1-\alpha)}) = 1-\alpha$, ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 26$ und $c_{(26,1-1\%)} = 45,64$, dass $\mathbb{P}(C \leq 45,64) = 1 - 1\% = 99\%$.

Lösung zu Aufgabe 1

Die Anzahl der Personen ist ein diskretes Merkmal, da die Merkmalsausprägungen die Zahlen 0,1,2,... sind und sich durchnummerieren lassen.

Entfernungen, Zeiten und Raten sind reelle Zahlen; zwischen je zwei verschiedenen Ausprägungen lassen sich immer eine weitere Ausprägung finden, die zwischen diesen Ausprägungen liegen. Damit sind Entfernungen, Zeiten und Raten stetige Merkmale.

Lösung zu Aufgabe 2

Eine kardinale Skalierung erfordert, dass sich die Merkmalsausprägungen sinnvoll ordnen lassen (ordinale Skalierung) und dass die Abstände zwischen zwei Merkmalsausprägungen sinnvoll interpretiert werden können.

Die Merkmalsausprägungen von Ausgaben sind Zahlen, die sich sinnvoll ordnen lassen (30€ sind mehr als 20€) und der Abstand zweier verschiedener Ausprägungen lässt sich als Differenz von Ausgaben ebenfalls sinnvoll interpretieren.

Verschiedene Religionszugehörigkeiten oder Geschlechter lassen sich nicht objektiv ordnen (Religion bzw. Geschlecht X ist nicht höher / besser / größer als Religion bzw. Geschlecht Y). Damit sind Religionszugehörigkeit und Geschlecht nicht ordinal und deswegen auch nicht kardinal.

Die Platzierung beim Campuslauf ist lediglich ordinal skaliert, die Abstände zwischen zwei Platzierungen lassen sich nicht objektiv interpretieren.

Lösung zu Aufgabe 3

Zur Berechnung des arithmetischen Mittels wird hier die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} a_j h(a_j)$$

verwendet, vobei a_j eine Merkmalsausprägung, k die Anzahl der verschiedenen Merkmalsausprägungen, $h(a_j)$ die absolute Häufigkeit der Merkmalsausprägung a_j und n den Stichprobenumfang bezeichnet.

a_j	0	1	2	3	4
$h(a_j)$	227	104	26	9	0

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{366}(0\cdot 227 + 1\cdot 104 + 2\cdot 26 + 3\cdot 9 + 4\cdot 0)\\ &= \frac{1}{366}(0+104+52+27+0) = \frac{183}{366} = \frac{1}{2} = 0,5\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Für den Median x_{Med} gilt $\sum_{a_j\le x_{\text{Med}}} f(a_j) \ge \frac{1}{2}$ und $\sum_{a_j\ge x_{\text{Med}}} f(a_j) \ge \frac{1}{2}$, bzw. $\sum_{a_j\le x_{\text{Med}}} h(a_j) \ge \frac{1}{2}\cdot n$ und $\sum_{a_j\ge x_{\text{Med}}} h(a_j) \ge \frac{1}{2}\cdot n$.

Prüfe $x_{\text{Med}} = 227$:

$$\sum_{a_j\le 227} h(a_j) = 227+104+26+9+0 = 366 \ge \frac{1}{2}\cdot 366 \checkmark$$

$$\sum_{a_j\ge 227} h(a_j) = 0 \not\ge \frac{1}{2}366$$

Prüfe $x_{\text{Med}} = 1$:

$$\sum_{a_j\le 1} h(a_j) = 227+104 = 331 \ge \frac{1}{2}\cdot 366 \checkmark$$

$$\sum_{a_j\ge 1} h(a_j) = 104+26+9 = 139 \not\ge 183$$

Prüfe $x_{\text{Med}} = 0,5$:

$$\sum_{a_j \leq 0,5} h(a_j) = 227 \geq 183 \checkmark$$

$$\sum_{a_j \geq 0,5} h(a_j) = 104 + 26 + 9 = 139 \ngeq 183$$

Prüfe $x_{\text{Med}} = 0$:

$$\sum_{a_j \leq 0} h(a_j) = 227 \geq 183 \checkmark$$

$$\sum_{a_j \geq 0} h(a_j) = 227 + 104 + 26 + 9 = 366 \geq 183 \checkmark$$

Der Median ist also $x_{\text{Med}} = 0$.

Lösung zu Aufgabe 5

Die relative kumulierte Häufigkeitsverteilung ist durch $F(x) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)$ definiert, wobei $f(a_j)$ die relative Häufigkeit der Ausprägung a_j bezeichnet.

In den Antwortmöglichkeiten sind die relativen Häufigkeiten $f(0), \ldots, f(3)$ angegeben. Diese stimmen nur für die erste Merkmalsausprägung $a_1 = 0$ mit der relativen kumulierten Häufigkeitsverteilung überein. Daher ist nur die Antwort $F(0) = 0,62$ richtig.

Lösung zu Aufgabe 6

Es bezeichne $\bar{a}_i$ das Ereignis, dass bei der i-ten der beiden ausgewählten Aufgaben Antwort a) unzutreffend ist.

Dann gilt $\mathbb{P}(\bar{a}_1) = \frac{6}{10}$. Gegeben, dass bei der ersten ausgewählten Aufgabe Antwort a) unzutreffend ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der zweiten ausgewählten Aufgabe Antwort a) ebenfalls unzutreffend ist, gegeben durch $\mathbb{P}(\bar{a}_2|\bar{a}_1) = \frac{5}{9}$. Wegen $\mathbb{P}(\bar{a}_2|\bar{a}_1) = \frac{\mathbb{P}(\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2)}{\mathbb{P}(\bar{a}_1)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2) = \mathbb{P}(\bar{a}_2|\bar{a}_1) \cdot \mathbb{P}(\bar{a}_1)$ gilt:

$$\mathbb{P}(\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens einer der beiden ausgewählten Aufgaben Antwort a) zutreffend ist, die Gegenwahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2)$, also $\mathbb{P}(a_1 \cup a_2) = 1 - \mathbb{P}(\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Aufgabe zu Teil i gehört, ist durch $\mathbb{P}(A1_i) = \frac{h_i}{12}$ gegeben, wobei h_i die Gesamtzahl der Aufgaben zu Teil i in der Klausur bezeichnet ($h_1 = 6, h_2 = 4, h_3 = 2$).

Gegeben, dass die erste Aufgabe zu Teil i gehört, ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die zweite Aufgabe zu Teil i gehört gegeben durch $\mathbb{P}(A2_i|A1_i) = \frac{h_i - 1}{11}$.

Wegen $\mathbb{P}(A2_i|A1_i) = \frac{\mathbb{P}(A1_i \cap A2_i)}{\mathbb{P}(A1_i)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A1_i \cap A2_i) = \mathbb{P}(A1_i) \cdot \mathbb{P}(A2_i|A1_i)$ gilt

$$\mathbb{P}(A1_i \cap A2_i) = \frac{h_i}{12} \cdot \frac{h_i - 1}{11}$$

Die beiden ersten Aufgaben gehören zu Teil 1: $\mathbb{P}(A1_1 \cap A2_1) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{5}{22}$

Die beiden ersten Aufgaben gehören zu Teil 2: $\mathbb{P}(A1_2 \cap A2_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$

Die beiden ersten Aufgaben gehören zu Teil 3: $\mathbb{P}(A1_3 \cap A2_3) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$

Da diese drei Ereignisse disjunkt sind, lassen sich deren Wahrscheinlichkeiten aufaddieren und die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Aufgaben zum gleichen Teil gehören lautet:

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{3}(A1_i \cap A2_i)) = \frac{5}{22} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66} = \frac{15 + 6 + 1}{66} = \frac{22}{66} = \frac{1}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 8

Die Anzahl X der richtig getippten Aufgaben ist eine Binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{2}$.

Demnach ist $\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4)$ und

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4), \text{ wobei}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{10}{k} \frac{1}{2^n}$$

Mit $\binom{10}{0} = 1$, $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{10}{3} = 120$ und $\binom{10}{4} = 210$ gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = (1 + 10 + 45 + 120 + 210)\frac{1}{2^{10}} = 386\frac{1}{2^{10}} = 0,376953125$$

und $\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) = 0,62$, wobei auf zwei Nachkommastellen gerundet wurde.

Lösung zu Aufgabe 9

Es gilt $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(\leq \frac{1}{2}Y \leq 2) = \mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4) = \mathbb{P}(Y \leq 4) - \mathbb{P}(Y \leq 0)$.

Da Y nicht standardnormalverteilt ist, müssen wir Y zunächst standardisieren, d.h. wir müssen $E[Y]$ subtrahieren und durch $\sqrt{Var(Y)}$ teilen. Betrachte hierfür die Ungleichung $Y \leq b$:

$$Y \leq b \Leftrightarrow Y - E[Y] \leq b - E[Y] \Leftrightarrow \frac{Y - E[Y]}{\sqrt{Var(Y)}} \leq \frac{b - E[Y]}{\sqrt{Var(Y)}}$$

Mit $E[Y] = 6$ und $\sqrt{Var(Y)} = \sqrt{16} = 4$ gilt:

$$Y \leq b \Leftrightarrow \frac{Y - 6}{4} \leq \frac{b - 6}{4}$$

Demnach: $\mathbb{P}(Y \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-6}{4} \leq \frac{b-6}{4}\right) = \Phi\left(\frac{b-6}{4}\right)$

Und: $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4) = \Phi\left(\frac{4-6}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0-6}{4}\right) = \Phi(-\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{3}{2})$

Aufgrund der Symmetrie von Φ um 0 gilt $\Phi(-\frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2})$ und $\Phi(-\frac{3}{2}) = 1 - \Phi(\frac{3}{2})$.

Der Tabelle im Anhang der Klausur entnehmen wir $\Phi(0,5) = 0,6915$ und $\Phi(\frac{3}{2}) = 0,9332$. Damit gilt

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,9332 - 0,6915 = 0,2417$$

Lösung zu Aufgabe 10

Da Z und Y unabhängig sind, gilt:

$$\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4, -1 \leq Z \leq 1) = \mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4) \cdot \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1)$$

Den Lösungsweg für $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4) = 0,2417$ können wir der Lösung zu Aufgabe 9 entnehmen.

Für $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1)$ berechnen wir $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) = \mathbb{P}(Z \leq 1) - \mathbb{P}(Z \leq -1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1$.

Mit $\Phi(1) = 0,8413$ ergibt sich $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$.

Dadurch folgt:

$$\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4, -1 \leq Z \leq 1) = \mathbb{P}(0 \leq Y \leq 4) \cdot \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) = 0,2417 \cdot 0,6825 = 0,1650$$

Lösung zu Aufgabe 11

Es gilt:

$$E[X_1 - X_2 + X_3 - X_4] = E[X_1] - E[X_2] + E[X_3] - E[X_4] = \mu - \mu + \mu - \mu = 0$$

Diese Schätzfunktion klappt also nur für $\mu = 0$ und ist daher nicht erwartungstreu.

Für die anderen Schätzfunktionen gilt:

$$E[2X_1 - X_2 + X_3 - X_4] = 2E[X_1] - E[X_2] + E[X_3] - E[X_4] = 2\mu - \mu + \mu - \mu = \mu$$
$$E[(X_1 + X_4)/2] = (E[X_1] + E[X_4])/2 = (\mu + \mu)/2 = \mu$$
$$E[4X_2 - X_1 - X_3 - X_4] = 4E[X_2] - E[X_1] - E[X_3] - E[X_4] = 4\mu - \mu - \mu - \mu = \mu$$

Damit sind die anderen Schätzfunktionen erwartungstreu.

Lösung zu Aufgabe 12

$$E[Z] = E[1000(1 + X)] = 1000(1 + E[X]) = 1000(1 + 0,07) = 1000 \cdot 1,07 = 1070$$
$$Var(Z) = Var(1000(1 + X)) = 1000^2 Var(1 + X) = 1000^2 Var(X) = 1000^2 \cdot 0,0025 = 2500$$
$$\sqrt{Var(Z)} = \sqrt{2500} = 50$$
$$\frac{Z - E[Z]}{\sqrt{Var(Z)}} = \frac{Z - 1.070}{50} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
$$\mathbb{P}(Z \geq c) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq c) = 1 - \Phi\left(\frac{c - 1.070}{50}\right) \overset{!}{=} 0,99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{c - 1.070}{50}\right) = 0.01$$
$$\frac{c - 1.070}{50} = x_{0,01} \Leftrightarrow c = x_{0,01} \cdot 50 + 1.070 \Leftrightarrow c = -x_{0,99} \cdot 50 + 1.070$$

Lösung zu Aufgabe 13

Für die Berechnung des sysmmetrischen zweiseitigen Konfidenzintervalls zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ sind folgende Größen erforderlich:

$$\bar{x} = 373,4 \ ; \ \sigma^2 = 100 \ ; \ n = 16 \ ; \ z_{1-\alpha/2} = 1,96$$

Das symmetrische zweiseitige Konfidenzintervall lautet allgemein:

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}; \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$$

Einsetzen der obigen Größen ergibt:

$$[373,4 - 1,96 \cdot 10/4; 373,4 + 1,96 \cdot 10/4]$$

Berechung ergibt:

$$[368,5; 378,3]$$

Lösung zu Aufgabe 14

Für diese Aufgabe ist der Gaußtest anzuwenden, da die Varianz der zugrundeliegenden Zufallsvariablen bekannt ist.

Die Gaußstatistik lautet allgemein:

$$G = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Mit den Werten $n = 16$, $\sigma^2 = 100$ und $\bar{x} = 373,4$ ergibt sich:

$$G = \frac{373,4 - \mu}{10/4} = \frac{2}{5}(373,4 - \mu)$$

In Antwortmöglichkeit $H_0 : \mu = 380$ ist wegen der in Gleichheit postulierten Nullhypothese ein zweiseitiger Test erforderlich. Das gesuchte Quantil lautet hier $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,975} = 1,96$. Die Nullhypothese $H_0 : \mu = 380$ wird abgelehnt, falls

$$\left|\frac{2}{5}(373,4 - 380)\right| > 1,96 \Leftrightarrow \frac{2}{5}|-6,6| > 1,96 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot 6,6 = 2,64 > 1,96 \checkmark$$

Für $H_0 : \mu \leq 380$ ist wegen der Ungleichheit ein einseitiger Test notwendig. Das gesuchte Quantil lautet hier $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,65$. Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls

$$\frac{2}{5}(373,4 - 380) > 1,65$$

Wie oben berechnet beträgt die linke Seite -2,64, die Nullhypothese kann also nicht abgelehnt werden. Für $H_0 : \mu = 375$ lautet die Ablehnungsbedingung

$$\left|\frac{2}{5}(373,4 - 375)\right| > 1,96$$

Die linke Seite der Ungleichung beträgt aber 0,64, daher kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.