Variante B

Statistik

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 5. Februar 2025

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐☐☐☐☐☐ Nachname __________

Studiengang __________ Vorname __________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß Liste als Hilfsmittel zugelassen.

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Welches der folgenden Merkmale ist diskret?

a) Entfernung des Haushalts zur nächsten S-Bahn Station

b) Anzahl der Personen im Haushalt

c) Durchschnittliche Anfahrtszeit vom Haushalt zum Arbeitsplatz

d) Kriminalitätsrate im Bereich der Postleitzahl des Haushalts

Aufgabe 2 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Welches der folgenden Merkmale hat eine kardinale Skalierung?

a) Geschlecht

b) Platzierung beim Campuslauf

c) Religionszugehörigkeit

d) Ausgaben für Mobilfunkanbieter

Aufgabe 3 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Die folgende Tabelle zeigt, wie oft wie viele der vier Aufzüge des Mathetowers im Jahr 2024 defekt waren:

Anzahl defekte Aufzüge	0	1	2	3	4
Anzahl Tage	227	104	26	9	0

Wie lautet der Median x_{Med} der Anzahl der defekten Aufzüge pro Tag?

Hinweis: Das Jahr 2024 war ein Schaltjahr und hatte 366 Tage.

a) $x_{\text{Med}} = 0$

b) $x_{\text{Med}} = 0,5$

c) $x_{\text{Med}} = 1$

d) $x_{\text{Med}} = 227$

Aufgabe 4 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Die folgende Tabelle zeigt, wie oft wie viele der vier Aufzüge des Mathetowers im Jahr 2024 defekt waren:

Anzahl defekte Aufzüge	0	1	2	3	4
Anzahl Tage	227	104	26	9	0

Welche der folgenden Aussagen ist in Bezug auf die relative kumulierte Häufigkeitsverteilung F der obigen Stichprobe richtig?

Hinweis: Das Jahr 2024 war ein Schaltjahr und hatte 366 Tage.

Die Werte der Antworten wurden auf zwei Nachkommastellen gerundet.

a) $F(1) = 0,28$

b) $F(0) = 0,62$

c) $F(3) = 0,02$

d) $F(2) = 0,07$

Aufgabe 5 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Eine Klausur zum Fach Parapsychologie enthalte Aufgaben mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten a) bis d), von denen jeweils genau eine zutreffend sei.

Bei genau 4 Aufgaben von den ersten 10 Aufgaben der Klausur zu Parapsychologie sei die Antwort a) zutreffend.

Es werden nun zwei verschiedene Aufgaben der ersten 10 Aufgaben mit gleicher Wahrscheinlichkeit unabhängig ausgewählt.

Wie lautet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: „Bei mindestens einer der beiden ausgewählten Aufgaben ist Antwort a) zutreffend"?

a) $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{10}$

b) $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$

c) $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{9}$

d) $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$

Aufgabe 6 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Eine Klausur zum Fach Parapsychologie enthalte Aufgaben mit jeweils vier Antwortmöglichkeiten a) bis d), von denen jeweils genau eine zutreffend sei.

Ein Student behauptet durch Berührung der jeweiligen Aufgabenstellung mit der Stirn jeweils zwei der vier Antworten als unzutreffend ausschließen zu können.

Es sei angenommen, dass er im Gegensatz zu seiner Behauptung bei jeder Aufgabe unabhängig rät, wobei er jeder der vier Antworten die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei den ersten 10 Aufgaben mindestens fünfmal jeweils zwei unzutreffende Antworten ausschließt?

In den Antwortmöglichkeiten dieser Aufgabe bezeichne X die Anzahl der Aufgaben, bei denen der Student nicht die zutreffende Antwort ausschließt.

Hinweis: Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $n = 10$ lauten:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{n}{k}$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten sind auf eine Nachkommastelle gerundet.

a) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 37,7\%$

b) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 73,3\%$

c) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 62,3\%$

d) $\mathbb{P}(X \geq 5) = 26,7\%$

Aufgabe 7 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es sei Y eine Zufallsvariable mit $Y \sim \mathcal{N}(6, 16)$ und es gelte $X = \frac{1}{2}Y$. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 0 und 2 liegt?

Hinweis:
Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten sind auf eine Nachkommastelle gerundet.

a) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 73,6\%$

b) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 93,3\%$

c) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 24,2\%$

d) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = 69,2\%$

Aufgabe 8 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Die vier Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und X_4 seien unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ. Welche der angegebenen Schätzefunktionen ist nicht erwartungstreu für μ?

a) $X_1 - X_2 + X_3 - X_4$

b) $2X_1 - X_2 + X_3 - X_4$

c) $(X_1 + X_4)/2$

d) $4X_2 - X_1 - X_3 - X_4$

Aufgabe 9 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Margot hat 1000 Euro gewonnen und investiert diese in ein Projekt. Nach der Projektlaufzeit erhält sie den Betrag $Z = 1000 \cdot (1 + X)$ zurück, wobei X normalverteilt ist mit Erwartungswert $E[X] = 0,07$ und Varianz $Var(X) = 0,0025$.

Margot sucht nun einen kritischen Wert c für den gilt:

$$\mathbb{P}(Z \geq c) = 99\%$$

Wie lautet die Formel für den kritischen Wert c?

In den Antwortmöglichkeiten bezeichnet x_α das α-Quantil, für welches gilt: $\Phi(x_\alpha) = \alpha$.

Hinweis:

Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

a) $c = x_{0,99} \cdot 25 + 1070$

b) Der Wert c lässt sich mit den angegebenen Informationen nicht berechnen.

c) $c = -x_{0,01} \cdot 50 + 1070$

d) $c = -x_{0,99} \cdot 50 + 1070$

Aufgabe 10 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Für $n = 16$ identisch und unabhängig normalverteilte Zufallsvariablen X_i sei die Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Das arithmetische Mittel der Stichprobe beträgt $\bar{x} = 373,4$.

Es sei bekannt, dass die Zufallsvariablen X_i die Varianz $Var(X_i) = 100$ haben.

Welche der folgenden Nullhypothesen können sie mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ ablehnen?

a) $H_0 : \ \mu \leq 380$

b) $H_0 : \ \mu = 380$

c) $H_0 : \ \mu = 375$

d) Keine der Nullhypothesen kann zum angegebenen Signifikanzniveau α abgelehnt werden.

Formelsammlung zu Teil 1 deskriptive Statistik

Eindimensionale Daten (Kapitel 3)

n: Stichprobenumfang, $x_1, \ldots, x_n$ Stichprobenwerte, $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ geordnete Stichprobenwerte
$a_j,\ j = 1, \ldots, k$: Ausprägungen, $h(a_j)$ bzw. $f(a_j) = \frac{h(a_j)}{n}$: absolute bzw. relative Häufigkeit von a_j
$H(x) = \sum_{a_j \leq x} h(a_j)$ bzw. $F(x) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)$: absolute bzw. relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

Lageparameter

Modalwert x_{Mod} (beliebige Skalierung): für Ausprägung $a = x_{Mod}$ gilt $h(x_{Mod}) \geq h(a_j)$ für alle $j = 1, \ldots, k$
Median x_{Med} (ordinale Skalierung): Für $a = x_{Med}$ gilt $\sum_{a_j \leq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$ und $\sum_{a_j \geq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$.
Arithmetisches Mittel (kardinale Skalierung): $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} a_j f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Geometrisches Mittel x_{Geom} (kardinale Skalierung): $x_{Geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}$ (nur für $x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$)

Streuungsmaße (alle: kardinale Skalierung)

Spannweite: $SP = \max_i x_i - \min_i x_i$
Durchschnittliche Abweichung von $\lambda \in \mathbb{R}$: $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \lambda|$
Mittlere quadratische Abweichung $s^2 = \sum_{j=1}^{k} (a_j - \bar{x})^2 \cdot f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Konzentrationsmaße (alle: kardinale Skalierung)

Variationskoeffizient: $V = s / \bar{x}$
Lorenzkurve: Polygonzug durch (u_k, v_k), $k = 0, \ldots, n$ mit $u_0 = v_0 = 0$, $u_k = \frac{k}{n}$, $v_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ für $k = 1, \ldots, n$
Gini-Koeffizient: $G = 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n+1}{n} = \sum_{k=2}^{n} u_{k-1} v_k - u_k v_{k-1}$
Herfindahl-Index: $H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right)^2$

Mehrdimensionale Daten (Kapitel 4)

Merkmale X und Y mit Ausprägungen $a_1, \ldots, a_k$ und $b_1, \ldots, b_l$
Abs. Häufigkeit von (a_i, b_j): $h_{ij} = h(a_i, b_j)$, *Randhäufigkeit von* a_i *bzw.* b_j: $h_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij}$, $h_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$
Relative Häufigkeiten: $f_{ij} = \frac{1}{n} h_{ij}$, $f_{i\bullet} = \frac{1}{n} h_{i\bullet}$, $f_{\bullet j} = \frac{1}{n} h_{\bullet j}$
Bedingte relative Häufigkeiten: $f_1(a_i | b_j) = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}$, $f_2(b_j | a_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}}$
X und Y unabhängig: $f_1(a_i | b_j) = f_{i\bullet} \Leftrightarrow h_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n} \Leftrightarrow f_2(b_j | a_i) = f_{\bullet j}$ für alle i, j
Kovarianz von X und Y (kardinale Skalierung): $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $(= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y})$
(Bravais-Pearson-)Korrelationskoeffizient von X und Y (kardinale Skalierung): $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$
Rangkorrelation von Spearman (ordinale Skalierung): $r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})(R(y_i) - \frac{n+1}{2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(y_i) - \frac{n+1}{2})^2}}$,
wobei $R(x_i)$: Rang von x_i, $R(y_i)$: Rang von y_i
Kontingenzkoeffizient (beliebige Skalierung): $K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$ mit $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$, wobei $\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}$

Lineare Transformation: $y_i = a + b \cdot x_i$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$y_{Mod} = a + b \cdot x_{Mod},\ y_{Med} = a + b \cdot x_{Med},\ \bar{y} = a + b \cdot \bar{x},\ s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2,\ s_y = |b| \cdot s_x,\ s_{zy} = b \cdot s_{zx},\ s_{xy} = \begin{cases} s_x \cdot s_y & , b \geq 0 \\ -s_x \cdot s_y & , b < 0 \end{cases}$$

Indexzahlen (Kapitel 5)

\# Güter: n, Preis p und Menge q von Gut i in Basis- bzw. Berichtsperiode: $p_0(i)$ und $q_0(i)$ bzw. $p_t(i)$ und $q_t(i)$
Preisindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $P_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $P_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}$, $P_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$
Mengenindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $Q_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$

Formelsammlung zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

ω: Elem.-ereignis, Ω: Ergebnismenge, $A \subset \Omega$: Ereignis, $\mathcal{A}$: Ereignissystem mit $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A}, A \cap B, A \cup B \in \mathcal{A}$

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten (Kapitel 7)

Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq}$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (falls $\mathbb{P}(B) > 0$).
Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$, wobei $A_1, \ldots, A_k$ Partition von Ω
Formel von Bayes: $\mathbb{P}(A_j|B) = \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j) / \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$
Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, falls: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Zufallsvariablen und Verteilungen (Kapitel 8)

Zufallsvariable: Funktion $X: \Omega \to \mathbb{R}$, *W'keit von Zufallsv.*: $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ für $B \subseteq \mathbb{R}$
Verteilungsfunktion: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ und $F(b) - F(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$ für $a < b$.
Diskrete Zufallsvariable: Falls Wertebereich $\{x_1, x_2, \ldots\}$ abzählbar. $p_i = \mathbb{P}(X(\omega) = x_i)$
Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$, *Verteilungsfunktion* $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
Gemeinsame W'keitsfunktion $f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, *gem. V-funktion* $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$
Randwahrscheinlichkeiten: $f_1(x) = \sum_{j=1}^{m} f(x, y_j)$, $f_2(y) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y)$
Randverteilungen: $F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} f_1(x_i)$, $F_2(y) = \sum_{y_j \leq y} f_2(y_j)$
Stetige Zufallsvariable: Falls Wertebereich überabzählbar, z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq}$ oder $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Verteilungsfunktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \mathbb{P}(X \leq x)$
Gemeinsame Dichtefunktion $f(x, y)$, gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t, s)dsdt$
Randdichten: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$
Randverteilungen: $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt$, $F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(s)ds$
Bedingte W'keits- bzw. Dichtefunktion: $f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$, $f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ (falls $f_1(x), f_2(y) > 0$)
Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig, falls: $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$ bzw. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

Verteilungsparameter (Kapitel 9)

α-Quantil x_α: $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha$ und $\mathbb{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$. Falls X stetig und $f(x) > 0$ für alle x: $F(x_\alpha) = \alpha$
Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i f(x_i)$ (falls X diskret) bzw. $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ (falls X stetig)
Rechenregeln: $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y + c] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b \cdot \mathbb{E}[Y] + c$. Falls X, Y unabhängig: $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Bedingte Erwartungswerte: $\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_i x_i f_1(x_i|y)$ (diskret) bzw. $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(t|y)dt$ (stetig)
Varianz σ^2 und Standardabweichung σ: $\sigma^2 = Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
Kovarianz von X und Y: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Korrelation von X und Y: $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$
Rechenregeln: $Var(a + b \cdot X) = b^2 Var(X)$, $Var(a + b \cdot X + c \cdot Y) = b^2 Var(X) + 2bcCov(X, Y) + c^2 Var(Y)$
Ungleichung von Tschebyscheff: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$

Einige wichtige Verteilungen

Bernoulliverteilung, $X \sim B(1, p)$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, $\mathbb{E}[X] = p$, $Var(X) = p(1 - p)$
Binomialverteilung, $X \sim B(n, p)$: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_i \overset{iid}{\sim} B(1, p)$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, $\mathbb{E}[X] = np$, $Var(X) = np(1 - p)$
Poissonverteilung, $X \sim P(\lambda)$: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$
Gleichverteilung $X \sim U(a, b)$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ für $a \leq x \leq b$, $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $\mathbb{E}[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$
Standardnormalverteilung $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ mit Dichte ϕ und Verteilungsfunktion Φ (siehe Anhang).
Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $F(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (*Standardisierung*: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$).

Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz (Kapitel 10)

X_i unabhängig und identisch verteilt (iid) mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1$ für alle $\epsilon > 0$.
Zentraler Grenzwertsatz: $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

Formelsammlung zu Teil 3 Inferenzstatistik

Grundlagen der Induktiven Statistik (Kapitel 11) (mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

Wichtige Testverteilungen

χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden: $C \sim \chi^2(n)$, $C = \sum_{i=1}^n X_i^2$ mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. $\mathbb{E}[C] = n$, $Var(C) = 2n$
t-Vert. mit n FG: $T = \frac{X}{\sqrt{C/n}} \sim t(n)$ mit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $C \sim \chi^2(n)$, X, C unabh. $\mathbb{E}[T] = 0$, $Var(T) = \frac{n}{n-2}$.

Wichtige Stichprobenfunktionen

Stichprobenmittel: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, *Gauß-Statistik*: $G = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Mittlere quadratische Abweichung bzgl. μ: $M^2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, $\mathbb{E}[M^2(\mu)] = \sigma^2$, $\frac{n}{\sigma^2}M^2(\mu) \sim \chi^2(n)$
Mittlere quadratische Abweichung: $M^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[M^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
Stichprobenvarianz: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$, $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$
t-Statistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Punktschätzung (Kapitel 12)

Schätzer für unbekannten Parameter θ: Funktion $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \to \Theta$ (mit Θ: Menge aller möglichen Parameter)
Erwartungstreue: $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ für alle $\theta \in \Theta$, *Effizienz*: $Var(\hat{\theta}) \le Var(\tilde{\theta})$ für alle erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}$
Konsistenz: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon\right) = 0$ für alle $\epsilon > 0$.
Kleinste Quadrate Schätzer $\hat{\theta}^{LS}$ für $\theta = \mu$: $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ (minimiert $\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta})^2$. $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ ist e-treu und effizient.)

Intervall-Schätzung (Kapitel 13)

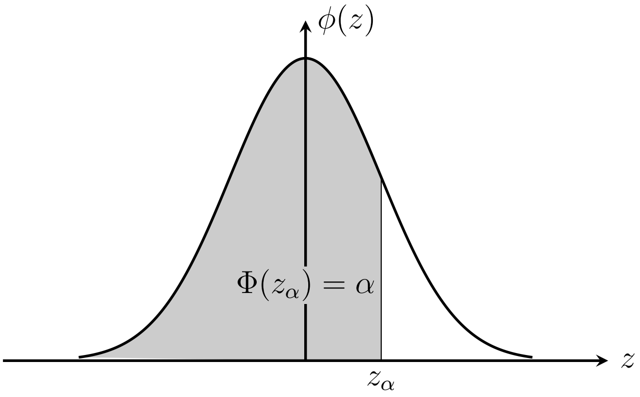
α-Quantil z_α für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Symmetrie $\Rightarrow \Phi(-z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = \Phi(z_{1-\alpha})$
Einseitige Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 bekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 bekannt: $\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $t_{(n-1,\alpha)}$ für $T \sim t(n-1)$: $\mathbb{P}(T \le t_{(n-1,\alpha)}) = \alpha$
Eins. Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 unbekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 unbekannt: $\left[\bar{X} - t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $c_{(n-1,\alpha)}$ für $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$: $\mathbb{P}\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \le c_{(n-1,\alpha)}\right) = \alpha$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für σ^2: $\left[\frac{n-1}{c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}S^2, \frac{n-1}{c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}S^2\right]$

Signifikanztests (Kapitel 14)

Gaußtest: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ unbekannt, σ^2 bekannt. Teststatistik: $G = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Lehne $H_0 : \mu \le \mu_0$ ab, falls $g > z_{1-\alpha}$. Lehne $H_0 : \mu \ge \mu_0$ ab, falls $g < -z_{1-\alpha}$
Binomialtest: $X_i \overset{iid}{\sim} B(n,p)$, p unbek. Teststat.: $V = \sum_{i=1}^n X_i$. Größtes c_1 mit $\mathbb{P}(X \le c_1) \le \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \le c_1 + 1) > \frac{\alpha}{2}$. Kleinstes c_2 mit $\mathbb{P}(X \ge c_2) \le \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \ge c_2 - 1) > \frac{\alpha}{2}$. Lehne $H_0 : p = p_0$ ab, falls $v < c_1 \vee v > c_2$.
t-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $|t| > t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \mu \le \mu_0$ ab, falls $t > t_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \mu \ge \mu_0$ ab, falls $t < -t_{(n-1,1-\alpha)}$.
Approximativer Gaußtest: X_i iid bel. vert., μ, σ^2 unbek., $n \ge 30$. Teststatistik: T. Testentsch.: wie Gauß-Test.
χ^2-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $V = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2}S^2$. Lehne $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}$ oder $v > c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2$ ab, falls $v > c_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \ge \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\alpha)}$.
Kontingenztest: $H_0 : X, Y$ unabhängig. Teststatistik: χ^2 aus Kapitel 4. Lehne H_0 ab, falls $\chi^2 > c_{(m,1-\alpha)}$, wobei $m = (\#$ Auspr. von $X - 1)(\#$ Auspr. von $Y - 1)$

Je nach Fortschritt der Vorlesung können hier noch weitere Formeln platziert werden.

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Hinweis zur Benutzung dieser Tabelle:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als $x+y$, ist in der Zeile x und Spalte y abzulesen. Zum Beispiel gilt: $\mathbb{P}(Z \leq 1,5+0,06) = \Phi(1,56) = 0,9406$, also 94,06%.

Für Wahrscheinlichkeiten $\alpha < 0,5$ kann $z_\alpha = 1 - z_{1-\alpha}$ benutzt werden.

Kritische Werte der t-Verteilung

		Signifikanzniveau				
	einseitig:	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
	zweiseitig:	20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits-	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
grade	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
	120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
	∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Hinweise zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei T eine Zufallsvariable, welche t-verteilt ist mit n Freiheitsgraden.

Einseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(T \leq t_{(n,1-\alpha)}) = 1 - \alpha = \mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha)} \leq T)$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „einseitig“ das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 22$ und $t_{(22,1-1\%)} = 2,508$, dass $\mathbb{P}(T \leq 2,508) = 1 - 1\% = 99\%$.

Zweiseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha/2)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha/2)} \leq T \leq t_{(n,1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „zweiseitig“ das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 5\%$, $n = 17$ und $t_{(17,1-2.5\%)} = 2,110$, dass $\mathbb{P}(-2,110 \leq T \leq 2,110) = 1 - 5\% = 95\%$.

Kritische Werte der χ^2-Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits-	1	2,71	3,84	6,63
Grade	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89

Hinweis zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei C eine Zufallsvariable, welche χ^2-verteilt ist mit n Freiheitsgraden. Das Quantil $c_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(C \leq c_{(n,1-\alpha)}) = 1-\alpha$, ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 26$ und $c_{(26,1-1\%)} = 45,64$, dass $\mathbb{P}(C \leq 45,64) = 1 - 1\% = 99\%$.