

Variante A

Statistik

Technische Universität Dortmund

Fakultät Wirtschaftswissenschaften

22. März 2023

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch Ja Nein

Matrikelnummer

Nachname _____

Studiengang _____

Vorname _____

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß der über Moodle bereitgestellten Liste zugelassen.

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung:

Korrektur:

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

Aufgabe 1 a) b) c) d)

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Aufgabe 5 a) b) c) d)

Aufgabe 6

Aufgabe 7

Aufgabe 8

Aufgabe 9 a) b) c) d)

Aufgabe 10

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Punktzahlen von 16 Studierenden in der Klausur zu „Diagramme in der deskriptiven Statistik“, in welcher zwischen 0 und 30 Punkte zu erreichen waren:

18, 16, 14, 24, 21, 24, 16, 21, 24, 17, 27, 9, 18, 13, 18, 21

Welches der folgenden vier Diagramme zeigt das Boxplot zu diesen Daten?

Diagramm a)

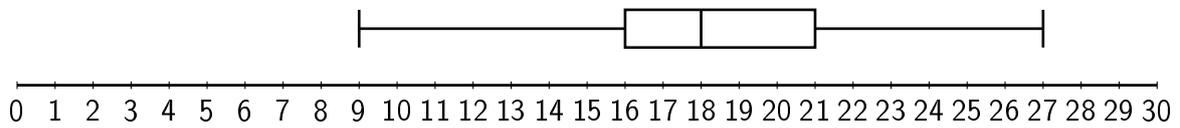


Diagramm b)

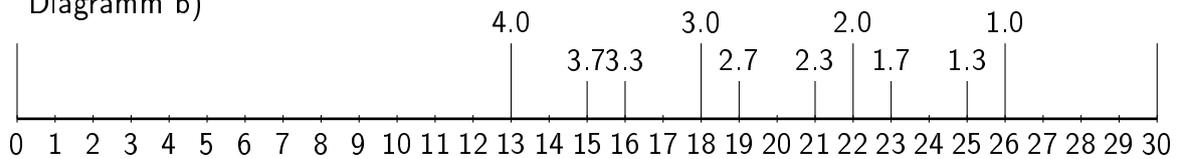


Diagramm c)

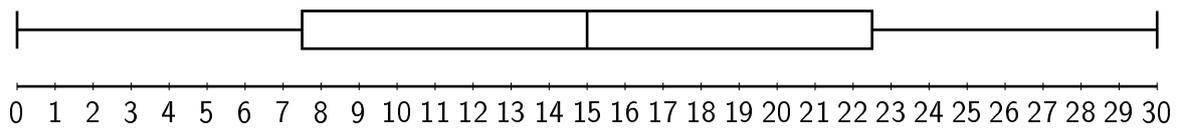
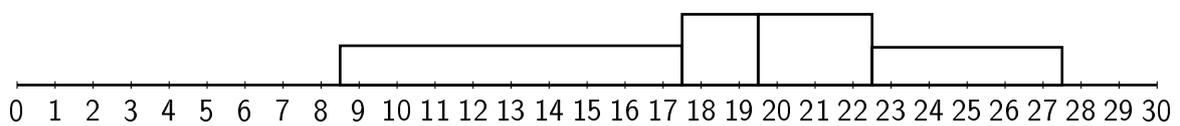


Diagramm d)



Aufgabe 2

In einer Kundenbefragung werden in zwei Wochen die beiden Stichproben x_1, \dots, x_{228} (Woche 1 mit 228 Beobachtungen) und y_1, \dots, y_{76} (Woche 2 mit 76 Beobachtungen) erhoben.

Das arithmetische Mittel der ersten Woche lautet $\bar{x}_a = 12,4$ und das arithmetische Mittel der zweiten Woche lautet $\bar{y}_a = 11,6$.

Wie lautet das arithmetische Mittel \bar{z}_a aller in Woche 1 und 2 gewonnenen Beobachtungen?

- a) $\bar{z}_a = 12$
- b) $\bar{z}_a = 11,6$
- c) $\bar{z}_a = 12,2$
- d) $\bar{z}_a = 12,4$

Aufgabe 3

Ein Wertpapier hat in den Jahren 2018 bis 2022 folgende Abschlusskurse:

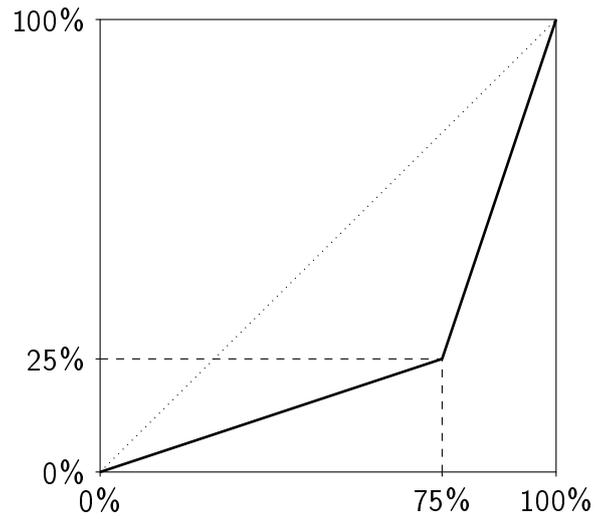
Jahr	2018	2019	2020	2021
Kurs	1000	1200	1440	1728

Welche mittlere Jahresrendite \bar{r} führt über diesen Zeitraum zu einer identischen Wertsteigerung?

- a) $\bar{r} = 20\%$
- b) $\bar{r} = 0\%$
- c) $\bar{r} = 44\%$
- d) $\bar{r} = 72,8\%$

Aufgabe 4

Das folgende Diagramm zeigt eine Lorenzkurve:

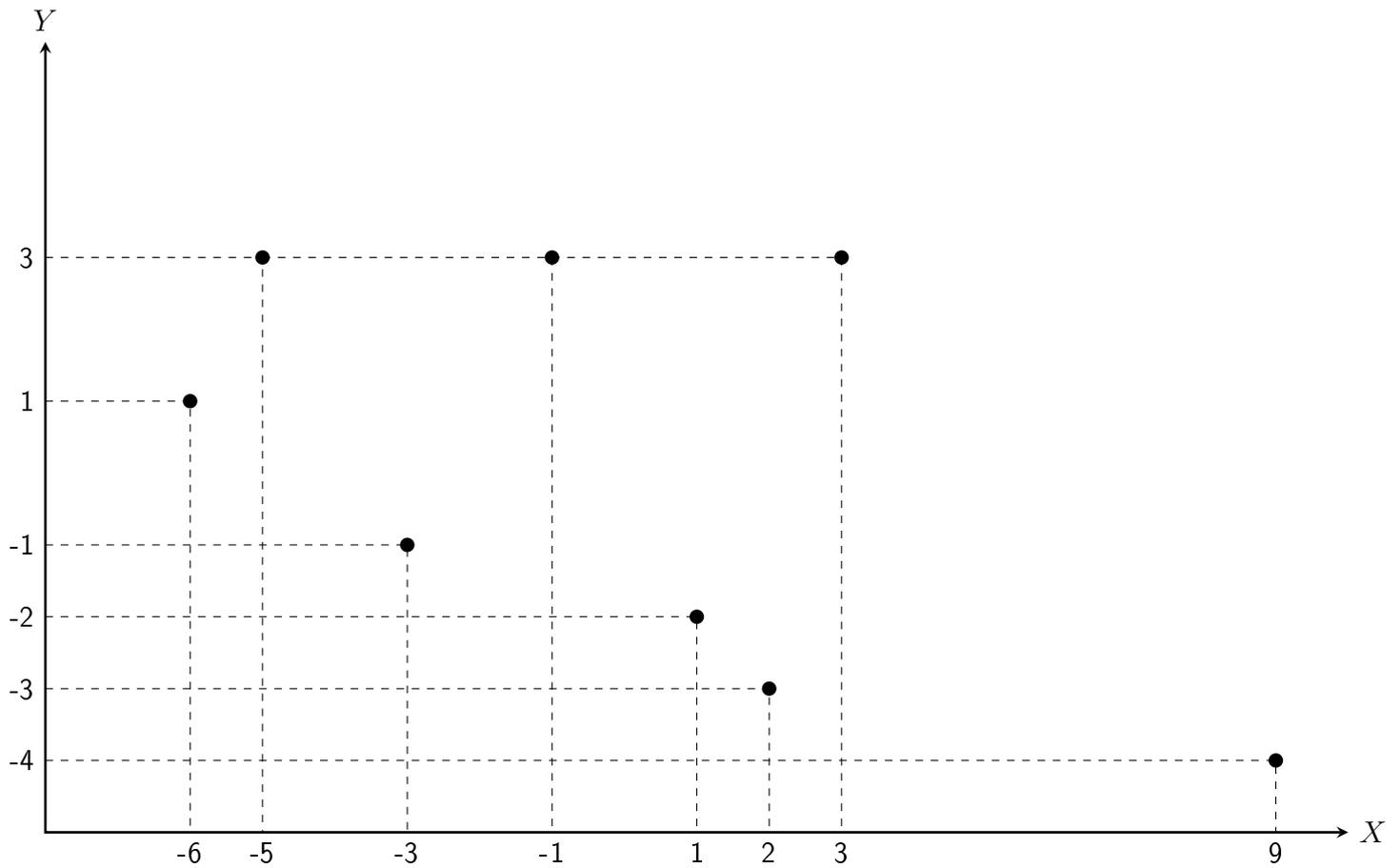


Wie lautet der dazugehörige Gini-Koeffizient G ?

- a) $G = 1$
- b) $G = 0,5$
- c) $G = 0$
- d) $G = 0,25$

Aufgabe 5

Das folgende Diagramm zeigt die zentrierten Daten (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 8$:



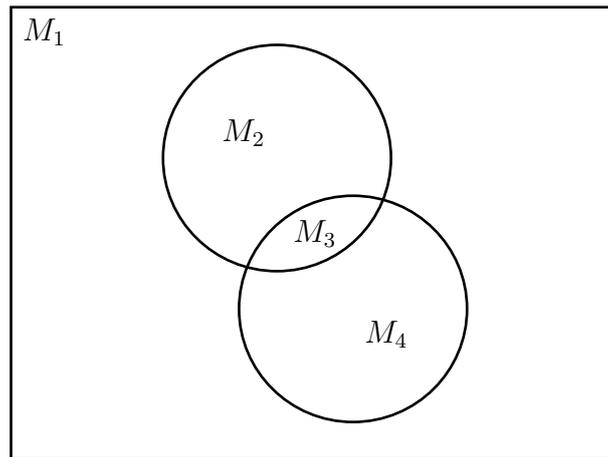
Ihnen sei zusätzlich bekannt, dass $\sum_{i=1}^8 x_i \cdot y_i = -56$.

Wie lautet die empirische Kovarianz von X und Y , s_{xy} ?

- a) $s_{xy} = -56$
- b) $s_{xy} = -7$
- c) $s_{xy} = 56$
- d) $s_{xy} = -8$

Aufgabe 6

Gegeben sei folgendes Venn-Diagramm, welches die paarweise disjunkten¹ Mengen M_1 , M_2 , M_3 und M_4 darstellt:



Es seien die folgenden Mengen definiert:

- $A = M_2 \cup M_3$ und $\bar{A} = M_1 \cup M_4$
- $B = M_3 \cup M_4$ und $\bar{B} = M_1 \cup M_2$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- $M_2 = A \cap \bar{B}$
- $M_2 = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $M_2 = A \cap B$
- $M_2 = \bar{A} \cap B$

¹Für zwei beliebige Mengen M_i und M_j mit $i \neq j$ gilt $M_i \cap M_j = \emptyset$; keine zwei verschiedenen Mengen überschneiden sich.

Aufgabe 7

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Wie lautet die Dichtefunktion von X ?

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \mathbb{E}[X] = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 8

Für die beiden Ereignisse $A, B \subset \Omega$ sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbb{P}(A) = 40\%, \mathbb{P}(B) = 40\% \text{ und } \mathbb{P}(A \cup B) = 70\%$$

Wie lautet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \cap B$?

- a) $\mathbb{P}(A \cap B) = 10\%$
- b) $\mathbb{P}(A \cap B) = 40\%$
- c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 20\%$
- d) $\mathbb{P}(A \cap B) = 30\%$

Aufgabe 9

Felizitas überlegt diese Klausur durch zufälliges Raten zu bestehen. Sie wird bei zwei von zehn Aufgaben zwei Kreuze setzen und für diese Aufgaben mit Wahrscheinlichkeit von je 50% je einen Punkt erhalten (und mit 50% null Punkte). Bei acht von zehn Aufgaben wird sie nur ein Kreuz setzen und für diese Aufgaben mit Wahrscheinlichkeit von je 25% je drei Punkte erhalten (und mit 75% null Punkte).

Es bezeichne X die Summe aller von ihr erzielten Punkte in dieser Klausur.

Wie lautet der Erwartungswert von X ?

a) $\mathbb{E}[X] = 10 \cdot 0,25 \cdot 3 + 2 \cdot 0,25 \cdot 1 = 8$

b) $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot 0,5 \cdot 1 + 8 \cdot 0,25 \cdot 3 = 7$

c) $\mathbb{E}[X] = 8 \cdot 0,5 \cdot 1 + 2 \cdot 0,25 \cdot 3 = 5,5$

d) $\mathbb{E}[X] = 10 \cdot 0,5 \cdot 1 + 8 \cdot 0,25 \cdot 2 = 9$

Aufgabe 10

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1036$ und der Varianz $\sigma^2 = 81$. Diese Zufallsvariable werde nun neun mal unabhängig gezogen. Es bezeichne \bar{X} den Durchschnitt dieser neun Ziehungen.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Durchschnitt höchstens 1042 beträgt?

Hinweis:

Auf der letzten Seite dieser Klausur finden Sie eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung.

a) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,5279$

b) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,7454$

c) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,9772$

d) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,5319$

absolute Häufigkeit: $H(a_j)$
 relative Häufigkeit: $h(a_j) = \frac{1}{n} H(a_j)$
 emp. Verteilungsfkt.: $F_n(x) = \sum_{i=1}^n h(a_i)$

Wachstumsfaktor: $\frac{x_2}{x_1}$
 Wachstumsrate: $\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} - 1$
 ges. Wachstumsrate: $r = (1 + r_m)^P - 1$
 allg. Wachstumsrate: $k_n = k_{n-1} (1 + r_n)$

arithmetische Mittel: $\bar{x}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
 gewichtetes Mittel: $\bar{x}_a^g = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i}$; $g_i > 0$
 Median: $\bar{x}_m = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

Spannweite: $R_x = \max_i x_i - \min_i x_i = x_{(n)} - x_{(1)}$

Quantile: $x_p = \begin{cases} x_{(n \cdot p)} & \text{falls } n \cdot p \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2}(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)}) & \text{falls } n \cdot p \text{ ganzzahlig} \end{cases}$

geometrisches Mittel: $\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$
 harmonisches Mittel: $\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$; $x_i > 0$

mittlere absolute Abweichung: $d_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_m|$
 mittlere absolute Differenz: $\Delta x = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|$

Varianz: $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_a)^2$
 Standardabweichung: $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Lorenzkurve: $(\frac{i}{n}, \frac{\sum_{j=1}^i x_{(j)}}{\sum_{j=1}^n x_{(j)}})$, $i = 1, \dots, n$
 Gini-Koeffizient: $G_x = \frac{\Delta x}{2 \bar{x}}$

Preisindex (Laspeyres): $P_{ot}^L = \frac{\sum_{i=1}^n P_t(i) \cdot q_0(i)}{\sum_{i=1}^n P_0(i) \cdot q_0(i)}$; Mengenindex (Laspeyres): $Q_{ot}^L = \frac{\sum_{i=1}^n P_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^n P_0(i) \cdot q_0(i)}$

Herfindal-Index: $H_x = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j})^2}$

Preisindex (Paasche): $P_{ot}^P = \frac{\sum_{i=1}^n P_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^n P_0(i) \cdot q_t(i)}$; Mengenindex (Paasche): $Q_{ot}^L = \frac{\sum_{i=1}^n P_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^n P_{t-1}(i) \cdot q_0(i)}$

Kovarianz: $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_a) \cdot (y_i - \bar{y}_a)$
 Korrelation: $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$

Preisindex (Fischer): $P_{ot}^F = \sqrt{P_{ot}^L \cdot P_{ot}^P}$; Mengenindex (Fischer): $Q_{ot}^F = \sqrt{Q_{ot}^L \cdot Q_{ot}^P}$

Kontingenzkoeffizient: $k = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$
 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{m(i)} \sum_{j=1}^{m(j)} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$; $\tilde{h}_{ij} = \frac{h_i \cdot h_j}{n}$
 $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{m-1}{m}}$, für $m = \min\{m(i), m(j)\}$

$A \cap B$: Schnittmenge
 $A \cup B$: Vereinigungsmenge
 \bar{A} : Komplementärmenge
 $A \setminus B$: Differenzmenge
 $A \cap B = \emptyset$: disjunkt
 Bayes: $P(A_j | B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$

La-place-Exp.: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
 bedingte W'K: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
 stochastisch unabhängig: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 W'K einer Schnittmenge: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$ [3 hier: Periode]
 Satz der vollständigen WK: $P(B) = \sum_{i=1}^m P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

	A	\bar{A}	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	

Baumdiagramm-Pfadregeln:
 1) W'K entlang eines Pfades multiplizieren
 2) alle günstigen Pfade addieren

W'K-Funktion: $f(x) = P(X = x)$
 Verteilungsfkt.: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \in \mathbb{I}; x_i \leq x} f(x_i)$
 Dichtefkt.: $f(x) = F'(x)$

Zufallsvariable: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega \mapsto X(\omega)$
 unabhängige ZV: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Schwache Gesetz d. großen Zahlen:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1 \forall \epsilon > 0$

Erwartungswert: $E[X] = \sum_{i \in \mathbb{I}} x_i \cdot f(x_i)$ (x: diskret, f(x): W'K-Funktion)
 $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$ (x: stetig, f(x): Dichtefkt.)

bed. Erwartungswert diskreter ZV: $E[Y|X=x] = \sum_{i \in \mathbb{I}} y_i \cdot f_{Y|X}(y_i|x)$
 bed. Erwartungswert von Fkt von Y: $E[g(Y)|X=x] = \sum_{i \in \mathbb{I}} g(y_i) \cdot f_{Y|X}(y_i|x)$
 bed. Erwartungswert stetiger ZV: $E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy$

Varianz: $var(x) = \sum_{i \in \mathbb{I}} (x_i - E[X])^2 f(x_i)$ (X: diskret, f(x): W'K-Funktion)
 $var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$ (X: stetig, f(x): Dichtefkt.)
 $\sigma^2 = E[(X - E[X])^2]$
 bed. Varianz: $var(Y|X=x) = \sum_{i \in \mathbb{I}} (y_i - E[Y])^2 \cdot f_{Y|X}(y_i|x)$

W'K-Fkt diskreter ZV: $f_{Y|X}(y_i|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$
 Dichtefkt stetiger ZV: $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s,t) dt ds$

α -Quantil: $P(X \leq x_\alpha) = F_X(x_\alpha) = \alpha$, falls $0 < \alpha < 1$
 Quantile normalverteilter ZV: $F_X(x) = \Phi(x) \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)$, α -Quantil: $Z_\alpha = \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}$

Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

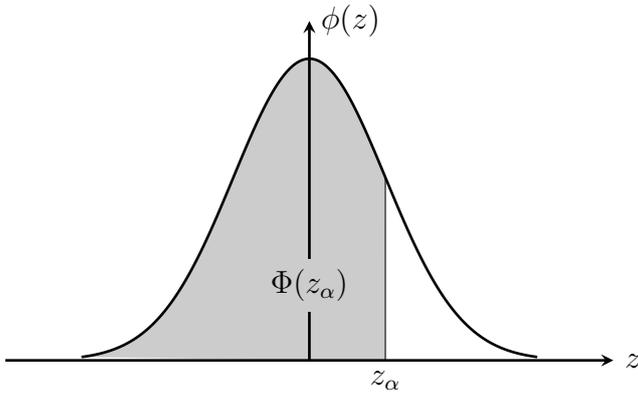
Bernoulli-Verteilung: $E[X] = p$; $var(X) = p \cdot (1-p)$
 Binomial-Verteilung: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $E[X] = n \cdot p$; $var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$
 Poisson-Verteilung: $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$; $E[X] = \lambda = var(X)$; $\lambda = n \cdot p$
 Gleichverteilung: $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$; $E[X] = \frac{a+b}{2}$; $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
 Normalverteilung: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$; $E[X] = \mu$; $var(X) = \sigma^2$

Kovarianz: $\sigma_{xy} = cov(X,Y) = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])]$
 Korrelation: $\rho_{xy} = corr(X,Y) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$
 affine Transformation: für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
 $X = b \cdot Z + a$; $E[X] = a$; $var(X) = b^2$
 Standardisierung: für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$; $E[Z] = 0$; $var(Z) = 1$

Standardnormalvert.: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$; $\mu = 0$; $\sigma^2 = 1$; $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

Viel Erfolg ☺
 Verona

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986