Variante **A**

Statistik

Technische Universität Dortmund — Fakultät Wirtschaftswissenschaften — 22. März 2023

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nachname __________

Studiengang __________ Vorname __________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß der über Moodle bereitgestellten Liste zugelassen.

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Punktzahlen von 16 Studierenden in der Klausur zu „Diagramme in der deskriptiven Statistik“, in welcher zwischen 0 und 30 Punkte zu erreichen waren:

$$18, 16, 14, 24, 21, 24, 16, 21, 24, 17, 27, 9, 18, 13, 18, 21$$

Welches der folgenden vier Diagramme zeigt das Boxplot zu diesen Daten?

Diagramm a)

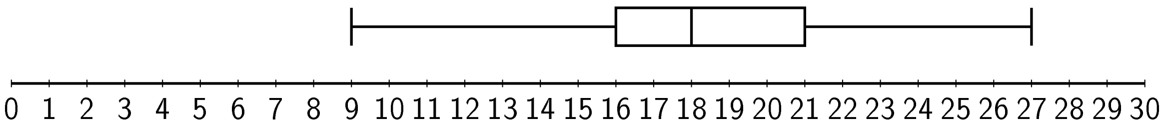


Diagramm b)

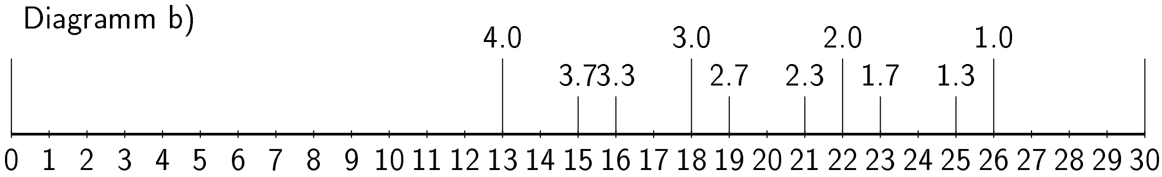


Diagramm c)

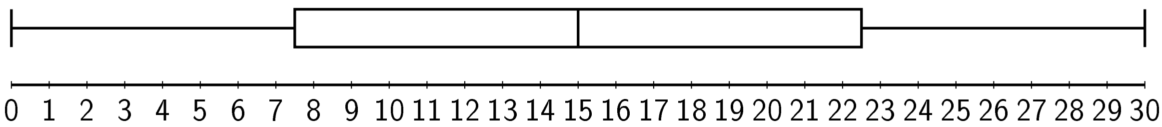
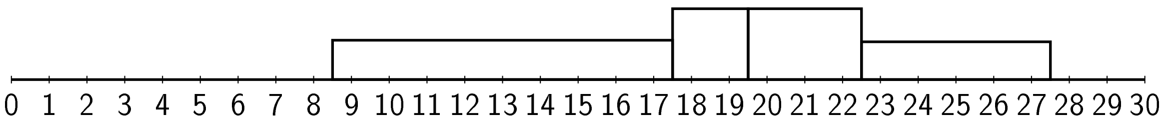


Diagramm d)



Lösung zu Aufgabe 1

Nur die Diagramme a) und c) zeigen ein Boxplot.

Die geordneten Daten lauten:

$$9, 13, 14, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 21, 21, 21, 24, 24, 24, 27$$

Das Pentagramm der Daten lautet:

$$\begin{aligned} x_{(1)} &= 9 \\ x_{0.25} &= 16 \\ x_{0.5} &= 18 \\ x_{0.75} &= 21 \\ x_{(16)} &= 27 \end{aligned}$$

Diagramm a) stimmt mit all diesen Angaben überein, Diagramm c) stimmt mit keiner dieser Angaben überein.

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit a) ist anzukreuzen.

Aufgabe 2

In einer Kundenbefragung werden in zwei Wochen die beiden Stichproben $x_1, \ldots, x_{228}$ (Woche 1 mit 228 Beobachtungen) und $y_1, \ldots, y_{76}$ (Woche 2 mit 76 Beobachtungen) erhoben.

Das arithmetische Mittel der ersten Woche lautet $\bar{x}_a = 12,4$ und das arithmetische Mittel der zweiten Woche lautet $\bar{y}_a = 11,6$.

Wie lautet das arithmetische Mittel $\bar{z}_a$ aller in Woche 1 und 2 gewonnenen Beobachtungen?

a) $\bar{z}_a = 12$

b) $\bar{z}_a = 11,6$

c) $\bar{z}_a = 12,2$

d) $\bar{z}_a = 12,4$

Lösung zu Aufgabe 2

Hier ist das gewichtete Mittel anzuwenden, wobei Woche 1 mit Gewicht $g_1 = \frac{228}{228+76} = \frac{3}{4}$ und Woche 2 mit Gewicht $g_2 = \frac{76}{228+76} = \frac{1}{4}$ gewichtet wird:

$$\bar{z}_a = \frac{3}{4} \cdot \bar{x}_a + \frac{1}{4} \cdot \bar{y}_a = \frac{3}{4}12,4 + \frac{1}{4}11,6 = 12,2$$

Ausführliche Begründung:

$$\begin{aligned}
\bar{z}_a &= \frac{1}{228+76}\left(\sum_{i=1}^{228} x_i + \sum_{i=1}^{76} y_i\right) \\
&= \frac{1}{228+76}\left(228\frac{1}{228}\sum_{i=1}^{228} x_i + 76\frac{1}{76}\sum_{i=1}^{76} y_i\right) \\
&= \frac{1}{228+76}228\frac{1}{228}\sum_{i=1}^{228} x_i + \frac{1}{228+76}76\frac{1}{76}\sum_{i=1}^{76} y_i \\
&= \frac{1}{228+76}228\bar{x}_a + \frac{1}{228+76}76\bar{y}_a \\
&= \frac{228}{228+76}\bar{x}_a + \frac{76}{228+76}\bar{y}_a
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit c) ist anzukreuzen.

Aufgabe 3

Ein Wertpapier hat in den Jahren 2018 bis 2022 folgende Abschlusskurse:

Jahr	2018	2019	2020	2021
Kurs	1000	1200	1440	1728

Welche mittlere Jahresrendite $\bar{r}$ führt über diesen Zeitraum zu einer identischen Wertsteigerung?

a) $\bar{r} = 20\%$

b) $\bar{r} = 0\%$

c) $\bar{r} = 44\%$

d) $\bar{r} = 72,8\%$

Lösung zu Aufgabe 3

Schneller Lösungsweg:

$$1000 \cdot (1+\bar{r})^3 \stackrel{!}{=} 1728 \Leftrightarrow (1+\bar{r})^3 = 1,728 \Leftrightarrow 1+\bar{r} = \sqrt[3]{1,728} \Leftrightarrow \bar{r} = \sqrt[3]{1,728} - 1 = 1,2 - 1 = 0,2$$

Oder man sieht: $1200 = 1000 \cdot (1+0,2)$, $1440 = 1200 \cdot (1+0,2)$ und $1728 = 1440 \cdot (1+0,2)$.

Schematischer Lösungsweg:

Zur Berechnung durchschnittlicher Wachstumsraten ist das geometrische Mittel zu verwenden.

Berechnung der Wachstumsfaktoren: $\frac{1200}{1000} = 1,2$, $\frac{1440}{1200} = 1,2$, $\frac{1728}{1440} = 1,2$

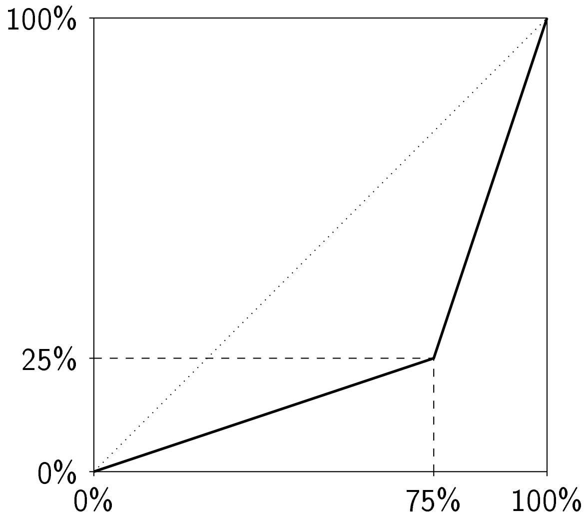
Das geometrische Mittel entspricht hier der dritten Wurzel des Produktes der drei Wachstumsfaktoren: $\sqrt[3]{1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2} = 1,2$.

Die durchschnittliche Jahresrendite ist nun das geometrische Mittel der Wachstumsfaktoren minus 1: $\bar{r} = \sqrt[3]{1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2} - 1 = 1,2 - 1 = 0,2$.

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit a) ist anzukreuzen.

Aufgabe 4

Das folgende Diagramm zeigt eine Lorenzkurve:



Wie lautet der dazugehörige Gini-Koeffizient G?

a) $G = 1$

b) $G = 0,5$

c) $G = 0$

d) $G = 0,25$

Lösung zu Aufgabe 4

Der Gini-Koeffizient gibt das Verhältnis der Fläche zwischen der Diagonalen und der Lorenzkurve und der Fläche der rechts-unteren Quadrathälfte an.

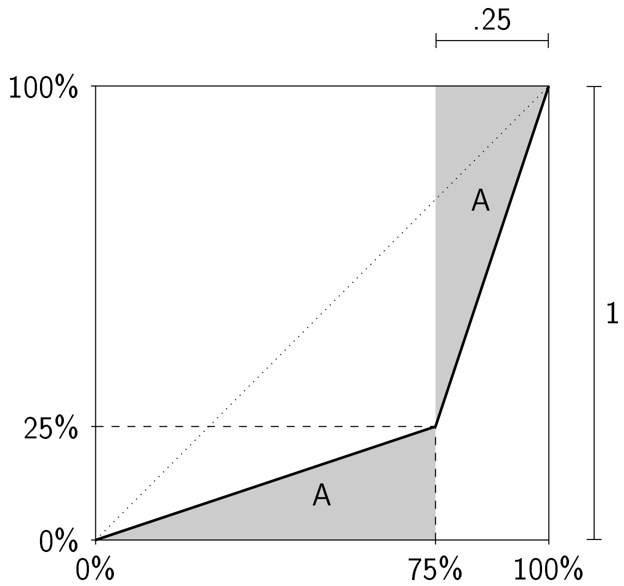
Da die Fläche des unteren Dreiecks gleich $\frac{1}{2}$ ist, ist der Gini-Koeffizient das Doppelte der Fläche zwischen der Diagonalen und der Lorenzkurve.

Liegt die Lorenzkurve weder auf der Diagonalen ($\rightarrow G = 0$) noch auf den Kanten des Quadrats ($\rightarrow G = 1$), ist der Gini-Koeffizient echt zwischen null und eins.

$\rightarrow$ Wir können a) $G = 1$ und c) $G = 0$ ausschließen.

Graphischer Lösungsweg:

Wir können die Fläche unterhalb der Lorenzkurve mit folgender Hilfe im Kopf berechnen:



Die beiden mit A gekennzeichneten Flächen stimmen überein, daher entspricht die Fläche unterhalb der Lorenzkurve der Fläche eines Rechtecks mit den Längen 0,25 und 1, also der Fläche 0,25.

Die Fläche zwischen Diagonale und Lorenzkurve entspricht der Fläche der rechts unteren Quadrathälfte (=0,5) minus der Fläche unterhalb der Lorenzkurve (=0,25), also 0,5-0,25=0,25.

Der Gini-Koeffizient ist das Doppelte dieser Fläche, also $G = 2 \cdot 0,25 = 0,5$.

Rechnerischer Lösungsweg:

Die Stützpunkte (k_i, l_i) der Lorenzkurve lauten: (0;0), (0,75; 0,25), (1,1).

Die Formel für den Gini-Koeffizienten lautet $G = \sum_{i=2}^{3} k_{i-1}l_i - k_i l_{i-1} = k_1 l_2 - k_2 l_1 + k_2 l_3 - k_3 l_2$.

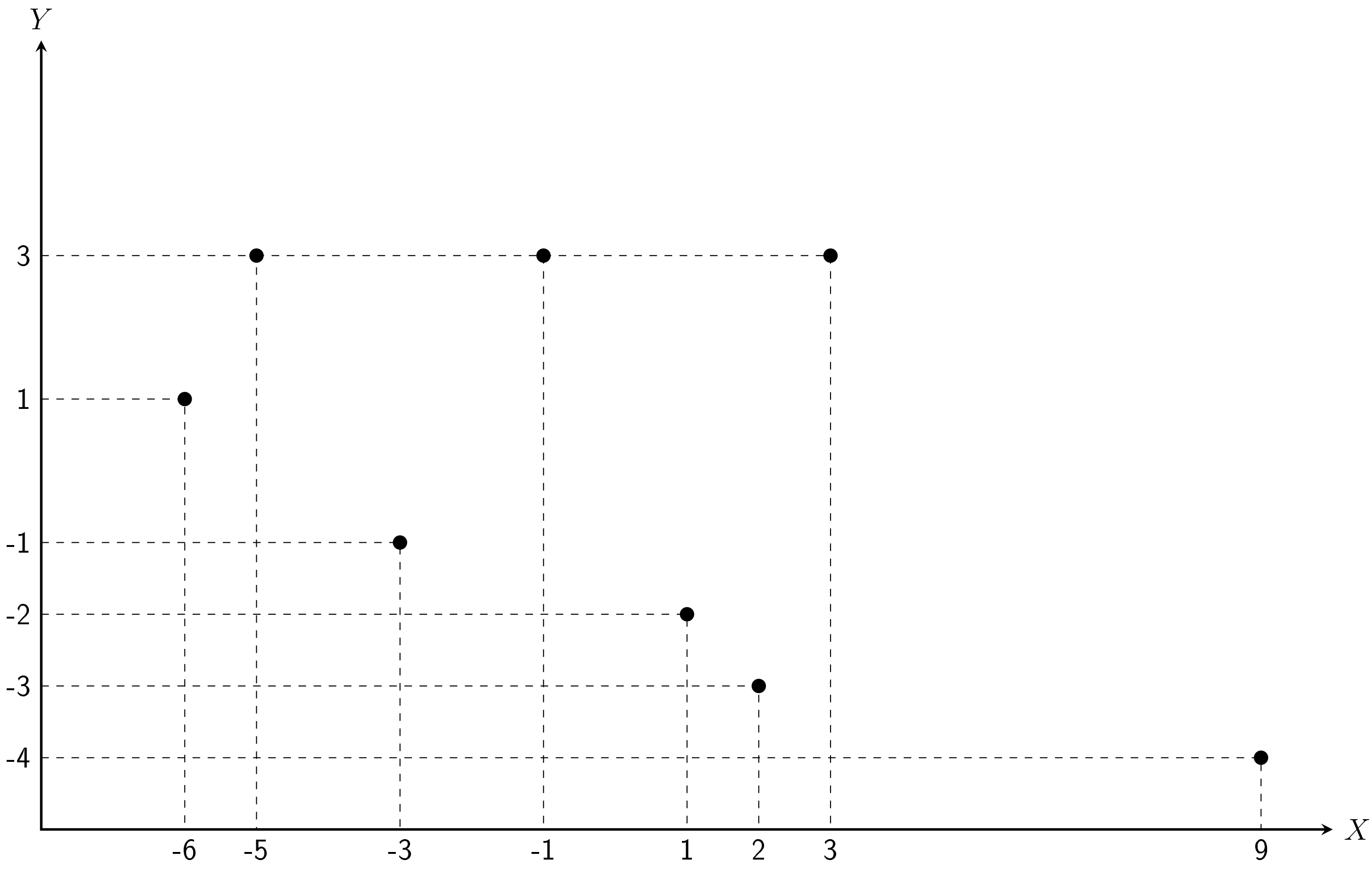
Die obigen Stützpunkte eingesetzt ergibt dies hier:

$$G = 0 \cdot 0,25 - 0,75 \cdot 0 + 0,75 \cdot 1 - 1 \cdot 0,25 = 0,75 - 0,25 = 0,5$$

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit b) ist anzukreuzen.

Aufgabe 5

Das folgende Diagramm zeigt die zentrierten Daten (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 8$:



Ihnen sei zusätzlich bekannt, dass $\sum_{i=1}^{8} x_i \cdot y_i = -56$.

Wie lautet die empirische Kovarianz von X und Y, s_{xy}?

a) $s_{xy} = -56$

b) $s_{xy} = -7$

c) $s_{xy} = 56$

d) $s_{xy} = -8$

Lösung zu Aufgabe 5

Die Formel für die empirische Kovarianz von X und Y lautet:

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_a)(y_i - \bar{y}_a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}_a \bar{y}_a$$

Welche der beiden Formeln benutzt wird, ist hier egal.

Für das arithmetische Mittel von X gilt:

$$\bar{x}_a = \frac{1}{8}\left(-6 + (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 2 + 3 + 9\right) = \frac{1}{8}\cdot(-15 + 15) = 0$$

und für das arithmetische Mittel von Y gilt:

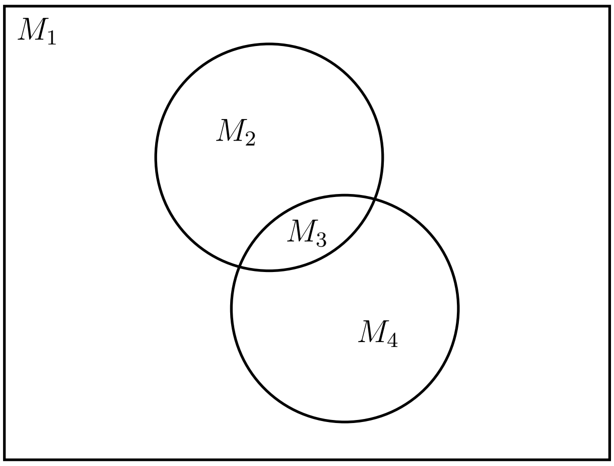
$$\bar{y}_a = \frac{1}{8}\left(-4 + (-3) + (-2) + (-1) + 1 + 3 + 3 + 3\right) = \frac{1}{8}\cdot(-10 + 10) = 0$$

Demnach gilt hier $s_{xy} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = \frac{1}{8}\cdot(-56) = -7$, wobei $\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = -56$ der Aufgabenstellung entnommen wurde.

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit b) ist anzukreuzen.

Aufgabe 6

Gegeben sei folgendes Venn-Diagramm, welches die paarweise disjunkten[1] Mengen M_1, M_2, M_3 und M_4 darstellt:



Es seien die folgenden Mengen definiert:

- $A = M_2 \cup M_3$ und $\overline{A} = M_1 \cup M_4$
- $B = M_3 \cup M_4$ und $\overline{B} = M_1 \cup M_2$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) $M_2 = A \cap \overline{B}$

b) $M_2 = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) $M_2 = A \cap B$

d) $M_2 = \overline{A} \cap B$

[1] Für zwei beliebige Mengen M_i und M_j mit $i \neq j$ gilt $M_i \cap M_j = \emptyset$; keine zwei verschiedenen Mengen überschneiden sich.

Lösung zu Aufgabe 6

Die Schnittmenge $D \cap E$ zweier Mengen D und E enthält alle Elemente, welche in D **und** in E enthalten sind.

Der Aufgabenstellung entnehmen wir, dass $A = M_2 \cup M_3$ gilt und $\bar{B} = M_1 \cup M_2$ gilt.

Nur die Menge M_2 ist in A und in $\bar{B}$ enthalten.

Formaler Lösungsweg:

Da M_1, M_2 und M_3 laut Aufgabenstellung disjunkt sind, gilt:

$$A \cap \bar{B} = (M_2 \cup M_3) \cap (M_1 \cup M_2) = \underbrace{(M_2 \cap M_1)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(M_2 \cap M_2)}_{M_2} \cup \underbrace{(M_3 \cap M_1)}_{\emptyset} \cup \underbrace{(M_3 \cap M_2)}_{\emptyset} = M_2$$

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit a) ist anzukreuzen.

Aufgabe 7

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Wie lautet die Dichtefunktion von X?

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$

b) $\mathbb{E}[X] = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 7

Die Dichtefunktion einer gleichverteilten Zufallsvariablen ist auf dem Intervall, auf welchem die ZV definiert ist, konstant und positiv.

Bei der Funktion...

- F hängen die Werte für $-1 \leq x \leq 1$ von x ab.
  (Es ist die Verteilungsfunktion von X).

- $\mathbb{E}[X] = 0$ hängt der Funktionswert zwar nicht von x ab, ist aber nicht positiv.
  (Es ist der Erwartungswert von X.)

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ hängen die Werte von x ab.
  (Es ist die Dichtefunktion einer standardnormal-verteilten ZV.)

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ hängt der Wert für $-1 \leq x \leq 1$ nicht von x ab und ist postiv.
  Zudem gilt $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit d) ist anzukreuzen.

Aufgabe 8

Für die beiden Ereignisse $A, B \subset \Omega$ sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbb{P}(A) = 40\%,\ \mathbb{P}(B) = 40\% \text{ und } \mathbb{P}(A \cup B) = 70\%$$

Wie lautet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A \cap B$?

a) $\mathbb{P}(A \cap B) = 10\%$

b) $\mathbb{P}(A \cap B) = 40\%$

c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 20\%$

d) $\mathbb{P}(A \cap B) = 30\%$

Lösung zu Aufgabe 8

Mit

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{B} - \mathbb{P}(A \cap B)$$

gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{B} - \mathbb{P}(A \cup B)$$

Mit den Werten der Aufgabenstellung gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 40\% + 40\% - 70\% = 10\%$$

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit a) ist anzukreuzen.

Aufgabe 9

Felizitas überlegt diese Klausur durch zufälliges Raten zu bestehen. Sie wird bei zwei von zehn Aufgaben zwei Kreuze setzen und für diese Aufgaben mit Wahrscheinlichkeit von je 50% je einen Punkt erhalten (und mit 50% null Punkte). Bei acht von zehn Aufgaben wird sie nur ein Kreuz setzen und für diese Aufgaben mit Wahrscheinlichkeit von je 25% je drei Punkte erhalten (und mit 75% null Punkte).

Es bezeichne X die Summe aller von Ihr erzielten Punkte in dieser Klausur.

Wie lautet der Erwartungswert von X?

a) $\mathbb{E}[X] = 10 \cdot 0,25 \cdot 3 + 2 \cdot 0,25 \cdot 1 = 8$

b) $\mathbb{E}[X] = 2 \cdot 0,5 \cdot 1 + 8 \cdot 0,25 \cdot 3 = 7$

c) $\mathbb{E}[X] = 8 \cdot 0,5 \cdot 1 + 2 \cdot 0,25 \cdot 3 = 5,5$

d) $\mathbb{E}[X] = 10 \cdot 0,5 \cdot 1 + 8 \cdot 0,25 \cdot 2 = 9$

Lösung zu Aufgabe 9

Für jede Aufgabe i, bei welcher Felizitas zwei Kreuze setzt, gilt $\mathbb{E}[X_i] = 0,5 \cdot 1$.

Für jede Aufgabe i, bei welcher Felizitas ein Kreuz setzt, gilt $\mathbb{E}[X_i] = 0,25 \cdot 3$.

Wenn Sie bei zwei Aufgaben zwei Kreuze und bei acht Aufgaben ein Kreuz setzt, gilt mit $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$:

$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot 0,5 \cdot 1 + 8 \cdot 0,25 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$$

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit b) ist anzukreuzen.

Aufgabe 10

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1036$ und der Varianz $\sigma^2 = 81$. Diese Zufallsvariable werde nun neun mal unabhängig gezogen. Es bezeichne $\bar{X}$ den Durchschnitt dieser neun Ziehungen.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Durchschnitt höchstens 1042 beträgt?

Hinweis:
Auf der letzten Seite dieser Klausur finden Sie eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung.

a) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,5279$

b) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,7454$

c) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,9772$

d) $\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) = 0,5319$

Lösung zu Aufgabe 10

Da X normalverteilt ist, ist auch $\bar{X}$ normalverteilt. Wir können X standardisieren, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle abzulesen.

Es gilt $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X] = 1036$ und $var(\bar{X}) = \frac{1}{n} var(X) = \frac{1}{9} 81 = 9$ und damit $\sqrt{var(\bar{X})} = \sqrt{9} = 3$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{X} \leq 1042) &= \mathbb{P}(\bar{X} - E[\bar{X}] \leq 1042 - 1036) \\
&= \mathbb{P}(\bar{X} - E[\bar{X}] \leq 6) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - E[\bar{X}]}{\sqrt{var(\bar{X})}} \leq \frac{6}{3}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - E[\bar{X}]}{\sqrt{var(\bar{X})}} \leq 2\right) \\
&= \Phi(2) = 0,9772
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Antwortmöglichkeit c) ist anzukreuzen.

absolute Häufigkeit : $H(a_j)$

relative Häufigkeit : $h(a_j) = \frac{1}{n} H(a_j)$

emp. Verteilungsfkt. : $F_n(x) = \sum_{i=1}^{n} h(a_i)$

Spannweite : $R_x = \max_i x_i - \min_i x_i = x_{(n)} - x_{(1)}$

Wachstumsfaktor : $\frac{x_2}{x_1}$

Wachstumsrate : $\frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} - 1$

ges. Wachstumsrate : $r = (1+r_m)^p - 1$

allg. Wachstumsrate : $K_n = K_{n-1}(1+r_n)$

arithmetische Mittel : $\bar{x}_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

gewichtetes Mittel : $\bar{x}_a^g = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i$; $g_i > 0$

Median : $\bar{x}_m = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

geometrisches Mittel : $\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

harmonisches Mittel : $\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$; $x_i > 0$

Quantile : $x_p = \begin{cases} x_{(\lceil n \cdot p \rceil)} & \text{falls } n\cdot p \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(n\cdot p)} + x_{(n\cdot p+1)}\right) & \text{falls } n \cdot p \text{ ganzzahlig} \end{cases}$

mittlere absolute Abweichung : $d_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}_m|$

mittlere absolute Differenz : $\Delta x = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|$

Varianz : $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_a)^2$

Standardabweichung : $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Lorenzkurve : $\left(\frac{i}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}}{\sum_{l=1}^{n} x_l}\right)$, $i = 1, \ldots, n$

Gini-Koeffizient : $G_x = \frac{\Delta x}{2 \cdot \bar{x}}$

Herfindal-Index : $H_x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}\right)^2$

Preisindex (Laspeyres) : $P_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_t(i) \cdot q_0(i)}{\sum_{i=1}^{n} P_0(i) \cdot q_0(i)}$; Mengenindex (Laspeyres) : $Q_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} P_0(i) \cdot q_0(i)}$

Preisindex (Paasche) : $P_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} P_0(i) \cdot q_t(i)}$; Mengenindex (Paasche) : $Q_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} P_t(i) \cdot q_0(i)}$

Preisindex (Fischer) : $P_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$; Mengenindex (Fischer) : $Q_{0t}^F = \sqrt{Q_{0t}^L \cdot Q_{0t}^P}$

Kovarianz : $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_a)\cdot(y_i - \bar{y}_a)$

Korrelation : $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$

Kontingenzkoeffizient : $k = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m(i)}\sum_{j=1}^{m(j)} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$ $\qquad \tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$

$0 \le k \le \sqrt{\frac{m-1}{m}}$, für $m = \min\{m(i), m(j)\}$

Rangkorrelation : $r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(rk(x_i) - \frac{1+n}{2}\right)\cdot\left(rk(y_i) - \frac{1+n}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(rk(x_i) - \frac{1+n}{2}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(rk(x_i) - \frac{1+n}{2}\right)^2}}$; $r_{xy}^{SP} = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n}(rk(x_i) - rk(y_i))^2}{n(n-1)(n+1)}$

$A \cap B$: Schnittmenge

$A \cup B$: Vereinigungsmenge

$\bar{A}$: Komplementärmenge

$A \setminus B$: Differenzmenge

$A \cap B = \emptyset$: disjunkt

Bayes: $P(A_j | B) = \frac{P(B|A_j)\cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(B|A_j)\cdot P(A_j)}$

La-place-Exp. : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

bedingte W'K : $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	

Baumdiagramm-Pfadregeln :
1) W'K entlang eines Pfades multiplizieren
2) alle günstigen Pfade addieren

stochastisch unabhängig : $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$

W'K einer Schnittmenge : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$ [hier: 3 Periode]

Satz der vollständigen WK : $P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i)\cdot P(A_i)$

W'K-Funktion : $f(x) = P(X = x)$

Verteilungsfkt. : $F(x) = P(X \le x) = \sum_{i \in I: x_i \le x} f(x_i)$

Dichtefkt. : $f(x) = F'(x)$

Zufallsvariable : $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\omega \mapsto X(\omega)$

unabhängige ZV : $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$

Schwache Gesetz d. großen Zahlen : $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \le \epsilon) = 1 \ \forall \epsilon > 0$

Erwartungswert : $\left.\begin{array}{ll} E[X] = \sum_{i \in I} x_i f(x_i) & (X: \text{diskret}, f(x): \text{W'K-Funktion}) \\ E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & (X: \text{stetig}, f(x): \text{Dichtefkt.}) \end{array}\right\} \mu$

bed. Erwartungswert diskreter ZV : $E[Y|X=x] = \sum_{i \in I} y_i \cdot f_{Y|X}(y_i|x)$

bed. Erwartungswert von Fkt von Y : $E[g(Y)|X=x] = \sum_{i \in I} g(y_i)\cdot f_{Y|X}(y_i|x)$

bed. Erwartungswert stetiger ZV : $E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy$

Varianz : $\left.\begin{array}{ll} var(x) = \sum_{i \in I}(x_i - E[X])^2 f(x_i) & (X: \text{diskret}, f(x): \text{W'K-Funktion}) \\ var(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f(x) dx & (X: \text{stetig}, f(x): \text{Dichtefkt.}) \end{array}\right\} \sigma^2 = E\left[(X - E[X])^2\right]$

bed. Varianz : $var(Y|X=x) = \sum_{i \in I}(y_i - E[Y])^2 \cdot f_{Y|X}(y|x)$

W'K-Fkt diskreter ZV : $f_{Y|X}(y,x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

Dichtefkt stetiger ZV : $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t) dt ds$

α-Quantil : $P(X \le x_\alpha) = F_X(x_\alpha) = \alpha$, falls $0 < \alpha < 1$

Quantile normalverteilter ZV : $F_X(x) = \Phi(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, α-Quantil : $z_\alpha = \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}$

Grenzwert : $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x)$

Bernoulliverteilung : $E[X] = p$; $var(X) = p\cdot(1-p)$

Binomialverteilung : $P(X=k) = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$; $E[X] = n\cdot p$; $var(X) = n\cdot p\cdot(1-p)$

Poissonverteilung : $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$; $E[X] = \lambda = var(X)$; $\lambda = n \cdot p$

Gleichverteilung : $P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$; $E[X] = \frac{a+b}{2}$; $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Normalverteilung : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$; $E[X] = \mu$; $var(X) = \sigma^2$

Standardnormalvert. : $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$; $\mu = 0$; $\sigma^2 = 1$; $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Kovarianz : $\sigma_{XY} = cov(X,Y) = E[(X - E[X])\cdot(Y - E[Y])]$

Korrelation : $\rho_{XY} = corr(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

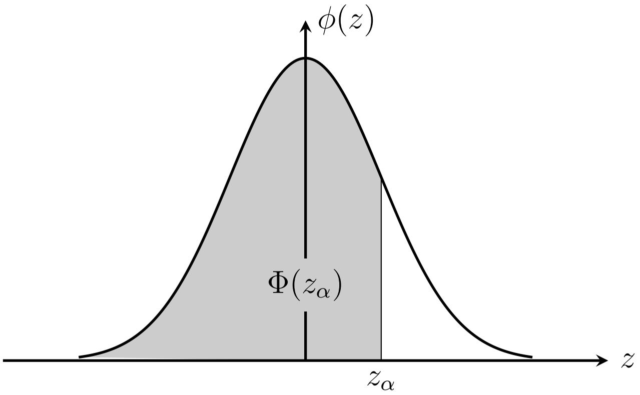
affine Transformation : für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$
$X = b\cdot Z + a$: $E[X] = a$; $var(X) = b^2$

Standardisierung : für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$; $E[Z] = 0$; $var(Z) = 1$

Viel Erfolg :)

Verona

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986