Variante -

Statistik

Technische Universität Dortmund | Fakultät Wirtschaftswissenschaften | 7. Februar 2024

Bitte tragen sie ihre Daten sorgfältig und leserlich ein:

1. Prüfungsversuch ☐ Ja Nein ☐

Matrikelnummer ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ Nachname ____________

Studiengang ____________ Vorname ____________

Bearbeitungshinweise:

Diese Klausur besteht aus 10 Aufgaben. Alle Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

Jede Aufgabe hat vier Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine zutreffend ist.

Markieren sie die jeweils zutreffende Antwortmöglichkeit jeder Aufgabe auf diesem Deckblatt. Es werden ausschließlich ihre Markierungen der jeweiligen Antwortmöglichkeiten a) bis d) auf diesem Deckblatt gewertet. Skizzen und Anmerkungen werden nicht bewertet.

Sie dürfen entweder eine oder zwei Antwortmöglichkeiten für jede Aufgabe markieren.

Markieren sie genau eine Antwortmöglichkeit, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit drei Punkte für die entsprechende Aufgabe.

Markieren sie genau zwei Antwortmöglichkeiten, so erhalten sie bei Markierung der zutreffenden Antwortmöglichkeit einen Punkt für die entsprechende Aufgabe.

In allen anderen Fällen erhalten sie null Punkte für diese Aufgabe.

Bitte verwenden sie einen Kugelschreiber oder nicht zu starken Filzstift.

Taschenrechner sind gemäß Liste als Hilfsmittel zugelassen.

Bei 18 von maximal 30 erreichbaren Punkten ist die Klausur in jedem Fall bestanden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Viel Erfolg!

Markierung: ☒ Korrektur: ■

Korrekturhinweis: Wenn sie irrtümlich ein falsches Kästchen angekreuzt haben, malen sie dieses bitte vollständig aus und kreuzen sie eindeutig erkennbar die zutreffende Antwort an.

	a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)		a)	b)	c)	d)
Aufgabe 1	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 5	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 9	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 2	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 6	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 10	☐	☐	☐	☐
Aufgabe 3	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 7	☐	☐	☐	☐					
Aufgabe 4	☐	☐	☐	☐	Aufgabe 8	☐	☐	☐	☐					

Aufgabe 1 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Zehn zufällig ausgewählte Absolventen verschiedener Bachelorstudiengänge wurden nach der Semesterzahl gefragt, die sie zur Erlangung des Studienabschlusses benötigten. Ergebnis sei die folgende Urliste:

$$9, 5, 6, 7, 5, 9, 13, 5, 6, 5$$

Welcher Anteil der Studierenden hat nicht länger als die Regelstudienzeit von sechs Semestern benötigt?

a) 60%

b) 20%

c) 40%

d) 100%

Aufgabe 2 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Gegeben sei wieder die Urliste aus Aufgabe 1:

$$9, 5, 6, 7, 5, 9, 13, 5, 6, 5$$

Wie lautet der Median dieser Liste?

a) $x_{Med} = 6$

b) $x_{Med} = 5$

c) $x_{Med} = 7$

d) $x_{Med} = 8$

Aufgabe 3 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Analog zur Erhebung von Aufgabe 1 $\{9, 5, 6, 7, 5, 9, 13, 5, 6, 5\}$ wurde auch im Vorjahr eine Stichprobe erhoben, allerdings vom Umfang $n = 20$. Das arithmetische Mittel aus dem Vorjahr beträgt 8,5 Semester.

Was ist das arithmetische Mittel aller 30 Beobachtungen aus dem Vorjahr und der aktuellen Stichprobe?

a) $\bar{x} = 8$

b) $\bar{x} = 5$

c) $\bar{x} = 6$

d) $\bar{x} = 7$

Aufgabe 4 (zu Teil 1 deskriptive Statistik)

Bei der Stichprobe von Aufgabe 1 stammen die Beobachtungen $\{9, 6, 5, 6, 5\}$ von Studierenden der Wirtschaftswissenschaften („WiWi") und die restlichen Beobachtungen $\{5, 7, 9, 13, 5\}$ von Studierenden anderer Fachrichtungen („andere").

Untersuchungsgegenstand sei wieder die Einhaltung der Regelstudienzeit von sechs Semestern.

Es bezeichne $f(R|\text{WiWi})$ bzw. $f(R|\text{andere})$ die bedingte relative Häufigkeit von Studierenden, die nicht länger als sechs Semester für den Abschluss benötigen, bedingt auf „WiWi" bzw. „andere".

Wie lauten diese bedingten relativen Häufigkeiten?

a) $f(R|\text{WiWi}) = 80\%$ und $f(R|\text{andere}) = 40\%$

b) $f(R|\text{WiWi}) = 80\%$ und $f(R|\text{andere}) = 20\%$

c) $f(R|\text{WiWi}) = 60\%$ und $f(R|\text{andere}) = 40\%$

d) $f(R|\text{WiWi}) = 60\%$ und $f(R|\text{andere}) = 60\%$

Aufgabe 5 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es befinden sich die vier Damen Agnes, Beatrix, Caroline und Dorothea in einem Raum. Alle tragen Lidschatten, der eventuell verwischt ist. Es bezeichnet ω eine genaue Auflistung derjenigen Personen, deren Lidschatten verwischt ist. So bezeichnet zum Beispiel

$$\omega = (1, 0, 1, 0)$$

dasjenige Elementarereignis, bei welchem die Lidschatten von Agnes und Caroline verwischt sind und

$$\omega = (0, 1, 1, 1)$$

dasjenige Elementarereignis, bei welchem alle Lidschatten außer der von Agnes verwischt sind. Es bezeichnet Ω die Menge aller 16 möglichen diesbezüglichen Elementarereignisse.

Wie viele Elementarereignisse gibt es, bei welchen die Lidschatten von maximal zwei Personen verwischt sind?

a) 11

b) 8

c) 9

d) 10

Aufgabe 6 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit, dass Agnes und Carolines Lidschatten verwischt sind, sei $3/12$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Carolines Lidschatten verwischt ist, sei $7/12$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Agnes Lidschatten nicht verwischt ist, sei $7/12$.

Es gebe für beide Personen jeweils nur die beiden Möglichkeiten „Lidschatten verwischt"und „Lidschatten nicht verwischt".

Wie groß ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit, dass Agnes Lidschatten verwischt ist und Carolines Lidschatten nicht verwischt ist?

a) $2/12$

b) $3/12$

c) $9/12$

d) $5/12$

Aufgabe 7 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Die Bäuerin Elfriede produziert Kartoffeln, deren Gewicht unabhängig und identisch normalverteilt mit $\mu = 100$ (g) und $\sigma^2 = 25$ sei. Eine Kartoffel wird der höchsten Gewichtsklasse zugeordnet, wenn sie mehr als 105 g wiegt.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Elfriede eine Kartoffel erntet, die nicht die höchste Gewichtsklasse aufweist?

Hinweis:
Eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten für standardnormalverteilte Zufallsvariablen befindet sich im Anhang dieser Klausur.

a) $\approx 84,1\%$

b) $\approx 17,8\%$

c) $\approx 0\%$

d) $\approx 15,9\%$

Aufgabe 8 (zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 0$ und Varianz $Var(X) = \sigma^2 < \infty$. Die Zufallsvariable Y sei durch

$$Y = a + bX$$

definiert, wobei $a, b \neq 0$.

Wie lautet der Erwartungswert des Quadrats von Y?

a) $\mathbb{E}[Y^2] = a^2 + b^2\sigma^2$

b) $\mathbb{E}[Y^2] = b^2\sigma^2$

c) $\mathbb{E}[Y^2] = \sigma^2$

d) $\mathbb{E}[Y^2]$ lässt sich mit den angegebenen Informationen nicht berechnen.

Aufgabe 9 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Die Güteklasse X eines Elektrogeräts kann nach der Produktion als A-Ware ($X = 1$), B-Ware ($X = 2$) oder Ausschuss ($X = 3$) klassifiziert werden. Die Wahrscheinlichkeit A-Ware zu produzieren sei p_1, die Wahrscheinlichkeit B-Ware zu produzieren p_2 und die Wahrscheinlichkeit Ausschuss zu produzieren p_3, mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Es werde eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ gezogen, wobei alle $X_i, i = 1, \ldots, n$ identisch zu X und unabhängig verteilt sind. Welcher dieser Ausdrücke ist ein erwartungsgetreuer Schätzer für p_1?

a) $\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 5X_i + 6)$

b) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2X_i)$

c) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (2X_i - X_i^2)$

d) $X_1 - X_2$

Aufgabe 10 (zu Teil 3 Inferenzstatistik)

Gegeben sei die Stichprobe aus Aufgabe 1:

$$9, 5, 6, 7, 5, 9, 13, 5, 6, 5$$

Nehmen Sie an, dass die einzelnen Beobachtungen identisch und unabhängig normalverteilt sind, wobei der Erwartungswert μ unbekannt sei und die Varianz $\sigma^2 = 7$ betrage.

Wie lautet das zweiseitige symmetrische Konfidenzintervall für μ zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$?

Hinweise:
Tabellen mit kritischen Werten verschiedener Verteilungen finden Sie im Anhang dieser Klausur.
Bei den angegebenen Antwortmöglichkeiten wurde das Ergebnis auf drei Nachkommastellen abgerundet.

a) $[5.360, 8.639]$

b) $[4.360, 7.639]$

c) $[5.627, 8.372]$

d) $[2.661, 11.338]$

Formelsammlung zu Teil 1 deskriptive Statistik

Eindimensionale Daten (Kapitel 3)

n: Stichprobenumfang, $x_1, \ldots, x_n$ Stichprobenwerte, $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ geordnete Stichprobenwerte
$a_j,\ j = 1, \ldots, k$: Ausprägungen, $h(a_j)$ bzw. $f(a_j) = \frac{h(a_j)}{n}$: absolute bzw. relative Häufigkeit von a_j
$H(x) = \sum_{a_j \leq x} h(a_j)$ bzw. $F(x) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)$: absolute bzw. relative kumulierte Häufigkeitsverteilung

Lageparameter

Modalwert x_{Mod} (beliebige Skalierung): für Ausprägung $a = x_{Mod}$ gilt $h(x_{Mod}) \geq h(a_j)$ für alle $j = 1, \ldots, k$
Median x_{Med} (ordinale Skalierung): Für $a = x_{Med}$ gilt $\sum_{a_j \leq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$ und $\sum_{a_j \geq x_{Med}} f(a_j) \geq \frac{1}{2}$.
Arithmetisches Mittel (kardinale Skalierung): $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} a_j f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Geometrisches Mittel x_{Geom} (kardinale Skalierung): $x_{Geom} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}$ (nur für $x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$)

Streuungsmaße (alle: kardinale Skalierung)
Spannweite: $SP = \max_i x_i - \min_i x_i$
Durchschnittliche Abweichung von $\lambda \in \mathbb{R}$: $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \lambda|$
Mittlere quadratische Abweichung $s^2 = \sum_{j=1}^{k} (a_j - \bar{x})^2 \cdot f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung $s = \sqrt{s^2}$

Verschiebungssatz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Konzentrationsmaße (alle: kardinale Skalierung)

Variationskoeffizient: $V = s/\bar{x}$
Lorenzkurve: Polygonzug durch (u_k, v_k), $k = 0, \ldots, n$ mit $u_0 = v_0 = 0$, $u_k = \frac{k}{n}$, $v_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ für $k = 1, \ldots, n$
Gini-Koeffizient: $G = 2 \frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n+1}{n} = \sum_{k=2}^{n} u_{k-1} v_k - u_k v_{k-1}$
Herfindahl-Index: $H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \right)^2$

Mehrdimensionale Daten (Kapitel 4)

Merkmale X und Y mit Ausprägungen $a_1, \ldots, a_k$ und $b_1, \ldots, b_l$
Abs. Häufigkeit von (a_i, b_j): $h_{ij} = h(a_i, b_j)$, *Randhäufigkeit von* a_i *bzw.* b_j: $h_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij}$, $h_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$
Relative Häufigkeiten: $f_{ij} = \frac{1}{n} h_{ij}$, $f_{i\bullet} = \frac{1}{n} h_{i\bullet}$, $f_{\bullet j} = \frac{1}{n} h_{\bullet j}$
Bedingte relative Häufigkeiten: $f_1(a_i|b_j) = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}$, $f_2(b_j|a_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}}$
X *und* Y *unabhängig*: $f_1(a_i|b_j) = f_{i\bullet} \Leftrightarrow h_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n} \Leftrightarrow f_2(b_j|a_i) = f_{\bullet j}$ für alle i, j
Kovarianz von X *und* Y (kardinale Skalierung): $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $(= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y})$
(Bravais-Pearson-)Korrelationskoeffizient von X *und* Y (kardinale Skalierung): $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$
Rangkorrelation von Spearman (ordinale Skalierung): $r_{xy}^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})(R(y_i) - \frac{n+1}{2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(x_i) - \frac{n+1}{2})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (R(y_i) - \frac{n+1}{2})^2}}$,
wobei $R(x_i)$: Rang von x_i, $R(y_i)$: Rang von y_i
Kontingenzkoeffizient (beliebige Skalierung): $K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$ mit $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$, wobei $\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}$

Lineare Transformation: $y_i = a + b \cdot x_i,\ a, b \in \mathbb{R}$:

$$y_{Mod} = a + b \cdot x_{Mod},\ y_{Med} = a + b \cdot x_{Med},\ \bar{y} = a + b \cdot \bar{x},\ s_y^2 = b^2 \cdot s_x^2,\ s_y = |b| \cdot s_x,\ s_{zy} = b \cdot s_{zx},\ s_{xy} = \begin{cases} s_x \cdot s_y & , b \geq 0 \\ -s_x \cdot s_y & , b < 0 \end{cases}$$

Indexzahlen (Kapitel 5)

Güter: n, Preis p und Menge q von Gut i in Basis- bzw. Berichtsperiode: $p_0(i)$ und $q_0(i)$ bzw. $p_t(i)$ und $q_t(i)$
Preisindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $P_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $P_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}$, $P_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$
Mengenindizes nach Laspeyres, Paasche & Fisher: $Q_{0t}^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_0(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_t(i)}{\sum_{i=1}^{n} p_t(i) \cdot q_0(i)}$, $Q_{0t}^F = \sqrt{P_{0t}^L \cdot P_{0t}^P}$

Formelsammlung zu Teil 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

ω: Elem.-ereignis, Ω: Ergebnismenge, $A \subset \Omega$: Ereignis, $\mathcal{A}$: Ereignissystem mit $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A}, A\cap B, A\cup B \in \mathcal{A}$

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten (Kapitel 7)

Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq}$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1-\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (falls $\mathbb{P}(B) > 0$).
Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$, wobei $A_1, \ldots, A_k$ Partition von Ω
Formel von Bayes: $\mathbb{P}(A_j|B) = \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j)/ \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$
Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, falls: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Zufallsvariablen und Verteilungen (Kapitel 8)

Zufallsvariable: Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *W'keit von Zufallsv.*: $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$ für $B \subseteq \mathbb{R}$
Verteilungsfunktion: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ und $F(b) - F(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$ für $a < b$.
Diskrete Zufallsvariable: Falls Wertebereich $\{x_1, x_2, \ldots\}$ abzählbar. $p_i = \mathbb{P}(X(\omega) = x_i)$
Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$, *Verteilungsfunktion* $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
Gemeinsame W'keitsfunktion $f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, *gem. V-funktion* $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$
Randwahrscheinlichkeiten: $f_1(x) = \sum_{j=1}^{m} f(x, y_j)$, $f_2(y) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y)$
Randverteilungen: $F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} f_1(x_i)$, $F_2(y) = \sum_{y_j \leq y} f_2(y_j)$
Stetige Zufallsvariable: Falls Wertebereich überabzählbar, z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq}$ oder $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
Dichtefunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \mathbb{P}(X \leq x)$
Gemeinsame Dichtefunktion $f(x, y)$, gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t, s)dsdt$
Randdichten: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$
Randverteilungen: $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt$, $F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(s)ds$
Bedingte W'keits- bzw. Dichtefunktion: $f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$, $f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$ (falls $f_1(x), f_2(y) > 0$)
Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig, falls: $F(x, y) = F_1(x)\cdot F_2(y)$ bzw. $f(x, y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$

Verteilungsparameter (Kapitel 9)

α-Quantil x_α: $\mathbb{P}(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha$ und $\mathbb{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$. Falls X stetig und $f(x) > 0$ für alle x: $F(x_\alpha) = \alpha$
Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i f(x_i)$ (falls X diskret) bzw. $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ (falls X stetig)
Rechenregeln: $\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y + c] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b \cdot \mathbb{E}[Y] + c$. Falls X, Y unabhängig: $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Bedingte Erwartungswerte: $\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_i x_i f_1(x_i|y)$ (diskret) bzw. $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(t|y)dt$ (stetig)
Varianz σ^2 und Standardabweichung σ: $\sigma^2 = Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
Kovarianz von X und Y: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
Korrelation von X und Y: $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}}$
Rechenregeln: $Var(a + b \cdot X) = b^2 Var(X)$, $Var(a + b \cdot X + c \cdot Y) = b^2 Var(X) + 2bcCov(X, Y) + c^2 Var(Y)$
Ungleichung von Tschebyscheff: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$

Einige wichtige Verteilungen

Bernoulliverteilung, $X \sim B(1, p)$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, $\mathbb{E}[X] = p$, $Var(X) = p(1 - p)$
Binomialverteilung, $X \sim B(n, p)$: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_i \overset{iid}{\sim} B(1, p)$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, $\mathbb{E}[X] = np$, $Var(X) = np(1 - p)$
Poissonverteilung, $X \sim P(\lambda)$: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$
Gleichverteilung $X \sim U(a, b)$: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ für $a \leq x \leq b$, $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $\mathbb{E}[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$
Standardnormalverteilung $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ mit Dichte ϕ und Verteilungsfunktion Φ (siehe Anhang).
Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $F(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (*Standardisierung*: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$).

Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz (Kapitel 10)

X_i unabhängig und identisch verteilt (iid) mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1$ für alle $\epsilon > 0$.
Zentraler Grenzwertsatz: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

Formelsammlung zu Teil 3 Inferenzstatistik

Grundlagen der Induktiven Statistik (Kapitel 11) (mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$)

Wichtige Testverteilungen

χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden: $C \sim \chi^2(n)$, $C = \sum_{i=1}^n X_i^2$ mit $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. $\mathbb{E}[C] = n$, $Var(C) = 2n$
t-Vert. mit n FG: $T = \frac{X}{\sqrt{C/n}} \sim t(n)$ mit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $C \sim \chi^2(n)$, X, C unabh. $\mathbb{E}[T] = 0$, $Var(T) = \frac{n}{n-2}$.

Wichtige Stichprobenfunktionen

Stichprobenmittel: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$, *Gauß-Statistik*: $G = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Mittlere quadratische Abweichung bzgl. μ: $M^2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, $\mathbb{E}[M^2(\mu)] = \sigma^2$, $\frac{n}{\sigma^2}M^2(\mu) \sim \chi^2(n)$
Mittlere quadratische Abweichung: $M^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[M^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$
Stichprobenvarianz: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$, $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$
t-Statistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Punktschätzung (Kapitel 12)

Schätzer für unbekannten Parameter θ: Funktion $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \to \Theta$ (mit Θ: Menge aller möglichen Parameter)
Erwartungstreue: $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ für alle $\theta \in \Theta$, *Effizienz*: $Var(\hat{\theta}) \leq Var(\tilde{\theta})$ für alle erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\theta}$
Konsistenz: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon\right) = 0$ für alle $\epsilon > 0$.
Kleinste Quadrate Schätzer $\hat{\theta}^{LS}$ für $\theta = \mu$: $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ (minimiert $\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta})^2$. $\hat{\theta}^{LS} = \bar{x}$ ist e-treu und effizient.)

Intervall-Schätzung (Kapitel 13)

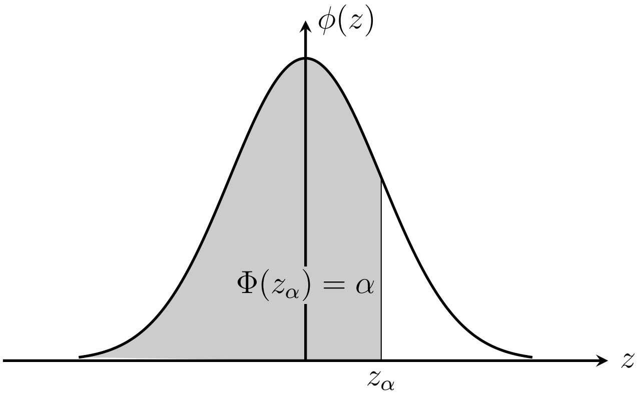
α-Quantil z_α für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Symmetrie $\Rightarrow \Phi(-z_\alpha) = 1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha = \Phi(z_{1-\alpha})$
Einseitige Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 bekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 bekannt: $\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $t_{(n-1,\alpha)}$ für $T \sim t(n-1)$: $\mathbb{P}(T \leq t_{(n-1,\alpha)}) = \alpha$
Eins. Konfidenzintervalle für μ bei σ^2 unbekannt: $\left(-\infty, \bar{X} + t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}\right]$ bzw. $\left(\bar{X} - t_{(n-1,1-\alpha)} \cdot S/\sqrt{n}, \infty\right]$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei σ^2 unbekannt: $\left[\bar{X} - t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}, \bar{X} + t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S/\sqrt{n}\right]$
α-Quantil $c_{(n-1,\alpha)}$ für $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$: $\mathbb{P}\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \leq c_{(n-1,\alpha)}\right) = \alpha$
Zweiseitiges Konfidenzintervall für σ^2: $\left[\frac{n-1}{c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}}S^2, \frac{n-1}{c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}}S^2\right]$

Signifikanztests (Kapitel 14)

Gaußtest: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ unbekannt, σ^2 bekannt. Teststatistik: $G = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $|g| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Lehne $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ab, falls $g > z_{1-\alpha}$. Lehne $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ab, falls $g < -z_{1-\alpha}$
Binomialtest: $X_i \overset{iid}{\sim} B(n,p)$, p unbek. Teststat.: $V = \sum_{i=1}^n X_i$. Größtes c_1 mit $\mathbb{P}(X \leq c_1) \leq \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \leq c_1 + 1) > \frac{\alpha}{2}$. Kleinstes c_2 mit $\mathbb{P}(X \geq c_2) \leq \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(X \geq c_2 - 1) > \frac{\alpha}{2}$. Lehne $H_0 : p = p_0$ ab, falls $v < c_1 \vee v > c_2$.
t-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$. Lehne $H_0 : \mu = \mu_0$ ab, falls $t > t_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \mu \leq \mu_0$ ab, falls $t > t_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ab, falls $t < -t_{(n-1,1-\alpha)}$.
Approximativer Gaußtest: X_i iid bel. vert., μ, σ^2 unbek., $n \geq 30$. Teststatistik: T. Testentsch.: wie Gauß-Test.
χ^2-Test: $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 unbekannt. Teststatistik: $V = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2}S^2$. Lehne $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}$ oder $v > c_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ab, falls $v > c_{(n-1,1-\alpha)}$. Lehne $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ ab, falls $v < c_{(n-1,\alpha)}$.
Kontingenztest: $H_0 : X, Y$ unabhängig. Teststatistik: χ^2 aus Kapitel 4. Lehne H_0 ab, falls $\chi^2 > c_{(m,1-\alpha)}$, wobei $m = (\#\text{ Auspr. von } X - 1)(\#\text{ Auspr. von } Y - 1)$

Je nach Fortschritt der Vorlesung können hier noch weitere Formeln platziert werden.

Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Hinweis zur Benutzung dieser Tabelle:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z einen Wert annimmt, welcher kleiner ist als $x+y$, ist in der Zeile x und Spalte y abzulesen. Zum Beispiel gilt: $\mathbb{P}(Z \leq 1,5+0,06) = \Phi(1,56) = 0,9406$, also 94,06%.

Kritische Werte der t-Verteilung

		Signifikanzniveau				
	einseitig:	10%	5%	2,5%	1%	0,5%
	zweiseitig:	20%	10%	5%	2%	1%
Freiheits-	1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
grade	2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
	40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
	60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
	90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632
	120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
	∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Hinweise zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei T eine Zufallsvariable, welche t-verteilt ist mit n Freiheitsgraden.

Einseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(T \leq t_{(n,1-\alpha)}) = 1 - \alpha = \mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha)} \leq T)$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „einseitig“ das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 22$ und $t_{(22,1-1\%)} = 2,508$, dass $\mathbb{P}(T \leq 2,508) = 1 - 1\% = 99\%$.

Zweiseitig: Das Quantil $t_{(n,1-\alpha/2)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(-t_{(n,1-\alpha/2)} \leq T \leq t_{(n,1-\alpha/2)}) = 1 - \alpha$ ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche unter „zweiseitig“ das Signifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 5\%$, $n = 17$ und $t_{(17,1-2.5\%)} = 2,110$, dass $\mathbb{P}(-2,110 \leq T \leq 2,110) = 1 - 5\% = 95\%$.

Kritische Werte der χ^2-Verteilung

		Signifikanzniveau		
		10%	5%	1%
Freiheits-Grade	1	2,71	3,84	6,63
	2	4,61	5,99	9,21
	3	6,25	7,81	11,34
	4	7,78	9,49	13,28
	5	9,24	11,07	15,09
	6	10,64	12,59	16,81
	7	12,02	14,07	18,48
	8	13,36	15,51	20,09
	9	14,68	16,92	21,67
	10	15,99	18,31	23,21
	11	17,28	19,68	24,72
	12	18,55	21,03	26,22
	13	19,81	22,36	27,69
	14	21,06	23,68	29,14
	15	22,31	25,00	30,58
	16	23,54	26,30	32,00
	17	24,77	27,59	33,41
	18	25,99	28,87	34,81
	19	27,20	30,14	36,19
	20	28,41	31,41	37,57
	21	29,62	32,67	38,93
	22	30,81	33,92	40,29
	23	32,01	35,17	41,64
	24	33,20	36,42	42,98
	25	34,38	37,65	44,31
	26	35,56	38,89	45,64
	27	36,74	40,11	46,96
	28	37,92	41,34	48,28
	29	39,09	42,56	49,59
	30	40,26	43,77	50,89

Hinweis zur Nutzung dieser Tabelle:

Es sei C eine Zufallsvariable, welche χ^2-verteilt ist mit n Freiheitsgraden. Das Quantil $c_{(n,1-\alpha)}$, für welches gilt $\mathbb{P}(C \leq c_{(n,1-\alpha)}) = 1 - \alpha$, ist in der Tabelle abzulesen in der Zeile n und in der Spalte, welche das Siginifikanzniveau α angibt. Zum Beispiel gilt für $\alpha = 1\%$, $n = 26$ und $c_{(26,1-1\%)} = 45,64$, dass $\mathbb{P}(C \leq 45,64) = 1 - 1\% = 99\%$.

Lösung zu Aufgabe 1

Von den zehn Beobachtungen sind mit viermal 5 und zweimal 6 insgesamt sechs Beobachtungen mit einem Wert von nicht größer als 6. Sechs von zehn entspricht 60%.

Lösung zu Aufgabe 2

Die geordnete Urliste ist gegeben durch

$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$	$x_{(8)}$	$x_{(9)}$	$x_{(10)}$
5	5	5	5	6	6	7	9	9	13

Für die fünft- und sechstkleinste Beobachtung gilt $x_{(5)} = x_{(6)} = 6$. Da für einen Median bei zehn Beobachtungen gelten muss: $x_{(5)} \leq x_{Med} \leq x_{(6)}$, folgt $x_{Med} = 6$.

Alternativ gilt $F(6) = 60\% \geq \frac{1}{2}$ (siehe Aufg. 1) und es kann leicht berechnet werden: $F(5) = 40\% < \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Das arithmetische Mittel der aktuellen Stichprobe ist:

$$\bar{x}_{heute} = \frac{1}{10}(5+5+5+5+6+6+7+9+9+13) = \frac{70}{10} = 7$$

Das arithmetische Mittel aller Beobachtungen

$$\bar{x} = \frac{1}{20+10}\left(\sum_{i \text{ alt}} x_i + \sum_{i \text{ neu}} x_i\right) = \frac{1}{30}\sum_{i \text{ alt}} x_i + \frac{1}{30}\sum_{i \text{ neu}} x_i$$

Wir wissen: $\sum_{i \text{ neu}} x_i = 10 \cdot \bar{x}_{neu} = 70$ und $\sum_{i \text{ alt}} x_i = 20 \cdot \bar{x}_{alt} = 20 \cdot 8,5 = 170$.

Damit gilt: $\bar{x} = \frac{1}{30}(170 + 70) = 240/30 = 8$

Alternativ: $\bar{x}$ ist das gewichtete Mittel von $\bar{x}_{alt}$ und $\bar{x}_{neu}$, wobei die Gewichte durch $\frac{20}{30}$ bzw. $\frac{10}{30}$ gegeben sind. Es gilt also $\bar{x} = \frac{2}{3} \cdot 8,5 + \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{24}{3} = 8$.

Lösung zu Aufgabe 4

Von den fünf Beobachtungen der Gruppe „WiWi" sind vier kleiner oder gleich sechs. Dies entspricht einem Anteil von $\frac{4}{5} = 80\%$.
Von den fünf Beobachtungen der Gruppe „andere" sind zwei kleiner oder gleich sechs. Dies entspricht einem Anteil von $\frac{2}{5} = 40\%$.

Lösung zu Aufgabe 5

Wie in der Aufgabenstellung angegeben, hat Ω 16(=2^4) Elementarereignisse ω. Davon ist $\binom{4}{0} = 1$ Elementarereignis ohne verwischten Lidschatten, $\binom{4}{2} = 4$ Elementarereignisse mit genau einem verwischten Lidschatten und $\binom{4}{2} = 6$ Elementarereignisse mit genau zwei Lidschatten. Also gibt es 1 + 4+ 6=11 Elementarereignisse mit maximal zwei verwischten Lidschatten.

Lösung zu Aufgabe 6

C \ A	v	nv	
v	$\frac{3}{12}$	-	$\frac{7}{12}$
nv	?	-	
	-	$\frac{7}{12}$	

Es gilt $\mathbb{P}(A = v) = 1 - \mathbb{P}(A = nv) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

Es gilt $\mathbb{P}(C = v, A = v) + \mathbb{P}(C = nv, A = v) = \mathbb{P}(A = v) \Leftrightarrow$
$\mathbb{P}(C = nv, A = v) = \mathbb{P}(A = v) - \mathbb{P}(C = v, A = v) = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12}$.

Lösung zu Aufgabe 7

Transformieren wir 105 g in die Standardnormalverteilung erhalten wir:

$$\frac{105 - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{105 - 100}{5} = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit eine Kartoffel der nicht-höchsten Gewichtsklasse zu ernten ist also $\Phi(1) \approx 0,8413$.

Lösung zu Aufgabe 8

Es gilt $Var(Y) = b^2 Var(X) = b^2\sigma^2$. Außerdem gilt $Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$. Daraus folgt: $\mathbb{E}[Y^2] = b^2\sigma^2 + \mathbb{E}[Y]^2$. Mit $\mathbb{E}[Y] = a + b\mathbb{E}[X] = a + b \cdot 0 = a$ folgt $\mathbb{E}[Y^2] = b^2\sigma^2 + \mathbb{E}[Y]^2 = b^2\sigma^2 + a^2$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\mathbb{E}[X_i^2 - 5X_i + 6] = p_1 \cdot \underbrace{(1^2 - 5 \cdot 1 + 6)}_{=2} + p_2 \cdot \underbrace{(2^2 - 5 \cdot 2 + 6)}_{=0} + p_3 \cdot \underbrace{(3^2 - 5 \cdot 3 + 6)}_{=0} = 2p_1$.

Damit gilt $\mathbb{E}\left[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 5X_i + 6)\right] = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i^2 - 5X_i + 6\right] = \frac{1}{2n} \cdot n \cdot 2p_1 = p_1$ für alle $p_1 \in [0,1]$.

b) $\mathbb{E}[X_i^2 - 2X_i] = p_1 \cdot \underbrace{(1^2 - 2 \cdot 1)}_{=-1} + p_2 \cdot \underbrace{(2^2 - 2 \cdot 2)}_{=0} + p_3 \cdot \underbrace{(3^2 - 2 \cdot 3)}_{=3} = 3p_3 - p_1$.

Damit gilt: $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i^2 - 2X_i\right] = \frac{1}{n} n(3p_3 - p_1) = 3p_3 - p_1$
Zum Beispiel für $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ wäre $3p_3 - p_1 = \frac{2}{3}$. Daher ist dieser Schätzer nicht erwartungstreu für p_1.

c) Dieser Schätzer ist $(-1)\cdot$ der Schätzer aus b). Daher ist der Erwartungswert dieses Schätzer durch $p_1 - 3p_3$ gegeben und damit ist auch dieser Schätzer nicht erwartungstreu für p_1.

d) $\mathbb{E}[X_1 - X_2] = \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_2] = 0$, da X_1 und X_2 identisch verteilt sind. Für ein beliebiges $p_1 > 0$ liegt dieser Schätzer daneben und ist daher nicht erwartungstreu für p_1.

Lösung zu Aufgabe 10

Das zweiseitige symmetrische Konfidenzintervall für μ bei bekannter Varianz σ^2 zum Signifikanzniveau α lautet:

$$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma/\sqrt{n}\right]$$

Das arithmetische Mittel der Stichprobe

$$9, 5, 6, 7, 5, 9, 13, 5, 6, 5$$

ist $\bar{x} = \frac{70}{10} = 7$. Mit $n = 10$ und $\sigma^2 = 7$ folgt $\sigma/\sqrt{n} = \sqrt{\sigma^2/n} = \sqrt{0.7} \approx 0,83666$. Das $1 - \frac{\alpha}{2}$-Quantil der standardnormal Verteilung lautet $z_{0.975} = 1.96$. Mit diesen drei Zahlen ergibt sich durch Einsetzen in die obige Formel für das Konfidenzintervall:

$$[7 - 1.96 \cdot 0.837, 7 + 1.96 \cdot 0.837] = [5.360, 8.639]$$