

Nebenbedingungen in Gleichheit



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

18.1 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

18.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

18.3 Mehrere Lösungskandidaten

18.4 Warum die Lagrange-Methode funktioniert

Nichtnegativitätsbedingungen

Beispiel Konsumententscheidung

Bestes Güterbündel, welches leistbar ist

„**Bestes Güterbündel**“: optimal im Sinne der Nutzenfunktion

Zielfunktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

„**leistbar**“: Kosten entsprechen dem verfügbaren Budget

Nebenbedingung $p \cdot x + y = m$

m : verfügbares Geld

x : Konsumgut, p : Preis hierfür

y : Ausgaben für andere Güter

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} u(x,y) \text{ unter der Nebenbedingung } px + y = m$$

Einfache Lösung

Forme Nebenbedingung nach y um:

$$px + y = m \Leftrightarrow y = m - px$$

und evaluiere u nur entlang des Pfades:

$$(x, y) \text{ mit } y = m - px$$

Definiere univariate Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) := u(x, m - px)$$

ohne Nebenbedingung.

Probleme:

Nebenbedingung nicht immer leicht nach y aufzulösen.

Gelingt nur bei zwei Gütern.

Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

Seien

$$f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar und sei die Zahl c ein möglicher Wert von g .

Optimierungsproblem:

$$\max / \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ unter der Bedingung } g(x,y) = c$$

Assoziiere den **Lagrange Multiplikator** $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Nebenbedingung $g(x,y) = c$.

Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

Zielfunktion f

Nebenbedingung $g(x, y) = c$

Lagrangemultiplikator λ

Anmerkung:

Für Paare (x, y) mit $g(x, y) = c$ gilt $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y)$

1. Partielle Ableitungen:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y)$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y)$$

Die Methode des Lagrange-Multiplikators

- (i) Schreibe die Lagrange-Funktion mit dem Multiplikator λ auf.
- (ii) Differenziere $\mathcal{L}$ nach x und y .
- (iii) *Bedingungen erster Ordnung:*

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y) = 0$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y) = 0$$

Nebenbedingung:

$$g(x, y) = c$$

- (iv) Wenn es eine Lösung (x^*, y^*) des Optimierungsproblems mit der bindenden Nebenbedingung gibt, so ist (x^*, y^*) Teil einer Lösung von (iii).

Wichtig:

- ▶ Wenn $g'_1(x^*, y^*) = g'_2(x^*, y^*) = 0$, kann die Methode scheitern.

Belindas Konsumproblem

Nutzenfunktion: $u(x, y) = x^2y$

Budgetbedingung: $x + y = m$, ($m > 0$ Belindas Einkommen)

18.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Wir können den Lagrange-Multiplikator λ als „Schattenpreis“ für die Restriktion $g(x, y) = c$ interpretieren.

Eine Veränderung der Konstante c führt zu einer Veränderung des Maximumwerts der Zielfunktion f .

Dies entspricht genau der Zahl λ .

Etwas genauer:

Seien $x^*(c)$, $y^*(c)$ und $\lambda^*(c)$ die Lösungen der restringierten Optimierung und sei $f^*(c)$ der Wert der Zielfunktion im Optimum.

Dann gilt:

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda^*(c)$$

18.3 Mehrere Lösungskandidaten

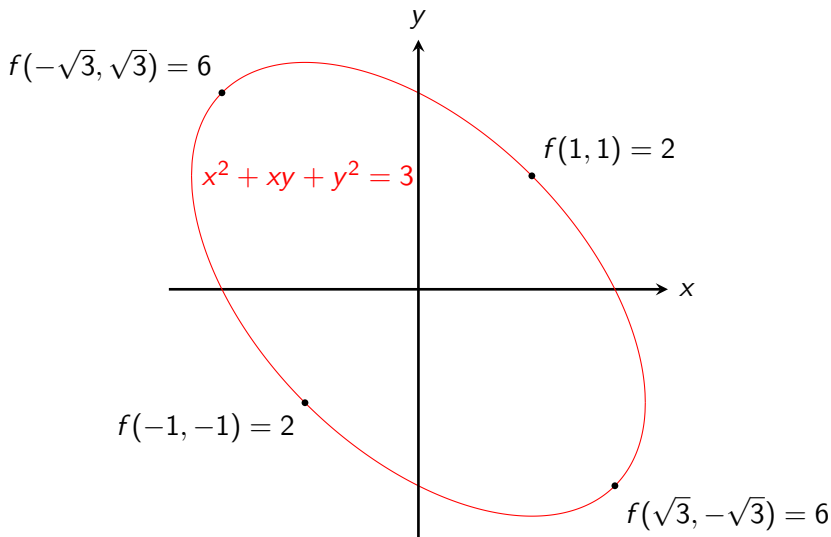
Eine Lösung des Optimierungsproblems mit Nebenbedingung erfüllt die Bedingungen erster Ordnung der Lagrangefunktion und die Nebenbedingung.

Deswegen stellen alle Tripel (x^*, y^*, λ^*) , die diese Bedingungen erfüllen, Lösungskandidaten dar.

Bei mehreren Lösungskandidaten müssen wir entscheiden, welcher Kandidat tatsächlich das Problem löst.

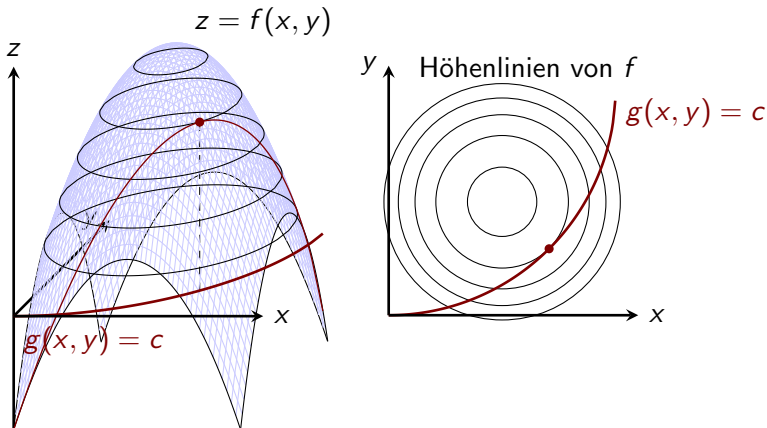
$$\max / \min_{x,y \in \mathbb{R}} x^2 + y^2 \text{ u.d.B. } x^2 + xy + y^2 = 3$$

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda (x^2 + xy + y^2 - 3)$$



18.4 Warum die Lagrange-Methode funktioniert

Ein geometrisches Argument



Der Graph von $g(x, y) = c$ ist im Optimum tangential zu einer Höhenlinie von f .

⇒ Die Steigungen des Graphen und der Höhenlinie stimmen überein.

Ein analytisches Argument

Die Gleichung $f(x, y) = \bar{z}$ und die Nebenbedingung $g(x, y) = c$ definieren Höhenlinien von f und g .

Die Steigungen dieser Höhenlinien sind definiert durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)} \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{g'_1(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Im Optimum (x, y) sind die Höhenlinien von f und g tangential, sie haben also die gleiche Steigung:

$$-\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)} = -\frac{g'_1(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Ein analytisches Argument

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$f'_1(x, y) - \lambda \cdot g'_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'_1(x, y)}{g'_1(x, y)}$$

$$f'_2(x, y) - \lambda \cdot g'_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'_2(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Demnach muss gelten:

$$\frac{f'_1(x, y)}{g'_1(x, y)} = \frac{f'_2(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Tangentialbedingung:

$$-\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)} = -\frac{g'_1(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Nichtnegativitätsbedingungen

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften fordern oft, dass Nebenbedingungen in Ungleichheit erfüllt werden müssen.

Die häufigste Nebenbedingung in Ungleichheit ist die **Nichtnegativitätsbedingung**.

Für diesen Fall kann die entsprechende Bedingung erster Ordnung sehr leicht angepasst werden.

Nichtnegativitätsbedingungen

Optimierungsproblem

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ u.d.B. } g(x,y) = c \ \& \ x \geq 0$$

Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\mathcal{L}'_1(x,y) \leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2(x,y) = 0$$

Beispiel 2: Präferenzen mit Sättigungspunkt

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} -(x - M)^2 - (y - 5)^2 \text{ u.d.B. } x \geq 0$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$-2(x - M) \leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0)$$

$$-2(y - 5) = 0$$

Zusammenfassung

- ▶ Lagrange-Multiplikatoren & Lagrange-Funktion
- ▶ Notwendige Bedingungen erster Ordnung
- ▶ Lagrange-Multiplikatoren als Schattenpreise
- ▶ Tangentialbedingung
- ▶ Nichtnegativitätsbedingungen