Vorlesung zu Kapitel 18:[1]

Nebenbedingungen in Gleichheit

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Beispiel Konsumentscheidung

Bestes Güterbündel, welches leistbar ist

„**Bestes Güterbündel**“: optimal im Sinne der Nutzenfunktion

Zielfunktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

„**leistbar**“: Kosten entsprechen dem verfügbaren Budget

Nebenbedingung $p \cdot x + y = m$

m: verfügbares Geld

x: Konsumgut, p: Preis hierfür

y: Ausgaben für andere Güter

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} u(x,y) \text{ unter der Nebenbedingung } px + y = m$$

Einfache Lösung

Forme Nebenbedingung nach y um:

$$px + y = m \Leftrightarrow y = m - px$$

und evaluiere u nur entlang des Pfades:

$$(x, y) \text{ mit } y = m - px$$

Definiere univariate Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) := u(x, m - px)$$

ohne Nebenbedingung.

Probleme:
Nebenbedingung nicht immer leicht nach y aufzulösen.
Gelingt nur bei zwei Gütern.

Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

Seien

$$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

differenzierbar und sei die Zahl c ein möglicher Wert von g.

Optimierungsproblem:

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} / \min \; f(x,y) \text{ unter der Bedigung } g(x,y) = c$$

Assoziiere den **Lagrange Multiplikator** $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Nebenbedingung $g(x,y) = c$.

Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

Zielfunktion f

Nebenbedingung $g(x, y) = c$

Lagrangemultiplikator λ

Anmerkung:

Für Paare (x, y) mit $g(x, y) = c$ gilt $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y)$

1. Partielle Ableitungen:

$$\mathcal{L}_1'(x, y) = f_1'(x, y) - \lambda g_1'(x, y)$$
$$\mathcal{L}_2'(x, y) = f_2'(x, y) - \lambda g_2'(x, y)$$

Die Methode des Lagrange-Multiplikators

(i) Schreibe die Lagrange-Funktion mit dem Multiplikator λ auf.

(ii) Differenziere $\mathcal{L}$ nach x und y.

(iii) *Bedingungen erster Ordnung*:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y) = 0$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y) = 0$$

Nebenbedingung:

$$g(x, y) = c$$

(iv) Wenn es eine Lösung (x^*, y^*) des Optimierungsproblems mit der bindenden Nebenbedingung gibt, so ist (x^*, y^*) Teil einer Lösung von (*iii*).

Wichtig:

- Wenn $g'_1(x^*, y^*) = g'_2(x^*, y^*) = 0$, kann die Methode scheitern.

Belindas Konsumproblem

Nutzenfunktion: $u(x, y) = x^2 y$

Budgetbedingung: $x + y = m$, ($m > 0$ Belindas Einkommen)

1) $\mathcal{L}(x, y) = x^2 \cdot y - \lambda(x + y - m)$

2) $\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = 2xy - \lambda \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2xy = \lambda$

$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = x^2 - \lambda \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 = \lambda$

3) $x + y = m$

$2xy = x^2$

$x = 0$ oder $2y = x$

$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{4}{9} m^2$

Fall 1 $\boxed{x_1 = 0}$ NB: $0 + \boxed{y_1 = m}$

$U(x_1, y_1) = 0^2 \cdot m = 0$

Fall 2 $x_2 = 2y_2$ NB: $2y_2 + y_2 = m \Leftrightarrow \boxed{y_2 = \frac{1}{3} m}$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{2}{3} m}$

$U(x_2, y_2) = \left(\frac{2}{3} m\right)^2 \cdot \frac{1}{3} m = \frac{4}{27} \cdot m^3$

$$x^*(m) = \frac{2}{3} m \quad , \quad y^*(m) = \frac{1}{3} m$$

$$U^*(m) = U(x^*(m), y^*(m)) = \frac{4}{27} \cdot m^3$$

$$\frac{d\, U^*(m)}{dm} = \frac{4}{27} \cdot 3 \cdot m^2 = \frac{4}{9} m^2 = \lambda^*(m)$$

18.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Wir können den Lagrange-Multiplikator λ als „Schattenpreis“ für die Restriktion $g(x, y) = c$ interpretieren.

Eine Veränderung der Konstante c führt zu einer Veränderung des Maximumwerts der Zielfunktion f.

Dies entspricht genau der Zahl λ.

$f^*(c) = f(x^*(c), y^*(c))$

Etwas genauer:

Seien $x^*(c), y^*(c)$ und $\lambda^*(c)$ die Lösungen der restringierten Optimierung und sei $f^*(c)$ der Wert der Zielfunktion im Optimum.

Dann gilt:

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda^*(c)$$

18.3 Mehrere Lösungskandidaten

Eine Lösung des Optimierungsproblems mit Nebenbedingung erfüllt die Bedingungen erster Ordnung der Lagrangefunktion und die Nebenbedingung.

Deswegen stellen alle Tripel (x^*, y^*, λ^*), die diese Bedingungen erfüllen, Lösungskandidaten dar.

Bei mehreren Lösungskandidaten müssen wir entscheiden, welcher Kandidat tatsächlich das Problem löst.

$\max / \min_{x,y \in \mathbb{R}} x^2 + y^2$ u.d.B. $x^2 + xy + y^2 = 3$

1) $\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$

3)

2) $\mathcal{L}_1'(x,y) = 2x - \lambda(2x + y) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x = \lambda(2x+y)$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2x}{2x+y}$ (falls $2x+y \neq 0$)

$\mathcal{L}_2'(x,y) = 2y - \lambda(x + 2y) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2y = \lambda(x+2y)$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2y}{x+2y}$ (falls $x+2y \neq 0$)

$x^2 + xy + y^2 = 3$

$\Rightarrow \frac{2x}{2x+y} = \frac{2y}{x+2y}$

$\Leftrightarrow 2x(x+2y) = 2y(2x+y)$

$\Leftrightarrow \cancel{2}x^2 + \cancel{4xy} = \cancel{4xy} + \cancel{2}y^2$

$\Leftrightarrow x^2 = y^2$

$\Leftrightarrow x_1 = y_1$ oder $x_2 = -y_2$

Nebenbedingung

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

$x_1 = y_1$

$$y_1^2 + y_1 \cdot y_1 + y_1^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_{1a} = -1 \text{ oder}$$
$$y_{1b} = 1$$

$(x_{1a}, y_{1a}) = (-1, -1) \quad (x_{1b}, y_{1b}) = (1, 1)$

$x_2 = -y_2$

$$(-y_2)^2 + (-y_2) \cdot y_2 + y_2^2 = 3$$

$$\cancel{y_2^2} - \cancel{y_2^2} + y_2^2 = 3 \Leftrightarrow y_{2a} = -\sqrt{3} \text{ oder}$$
$$y_{2b} = \sqrt{3}$$

$(x_{2a}, y_{2a}) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \quad (x_{2b}, y_{2b}) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

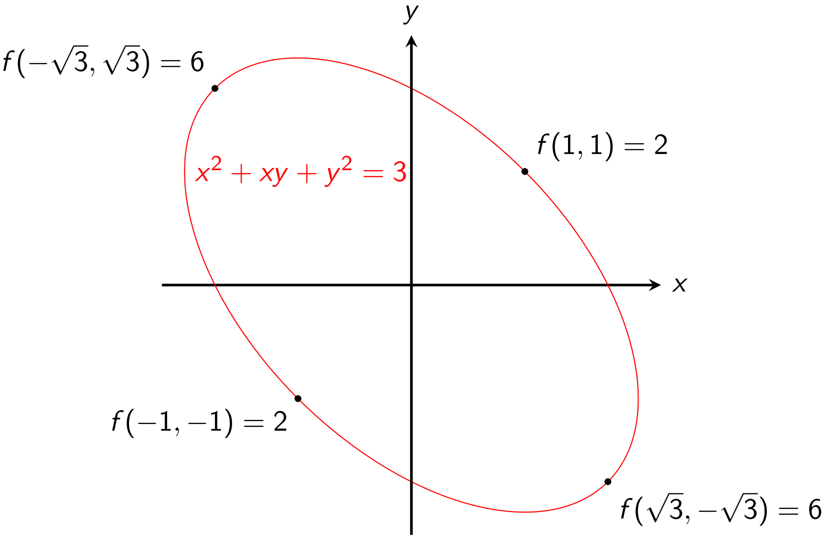
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_{1a}, y_{1a}) &= (-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2 \\ f(x_{1b}, y_{1b}) &= 1^2 + 1^2 = 2 \end{aligned}\right\} \text{Min}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_{2a}, y_{2a}) &= \sqrt{3}^2 + (-\sqrt{3})^2 = 3 + 3 = 6 \\ f(x_{2b}, y_{2b}) &= (-\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2 = 3 + 3 = 6 \end{aligned}\right\} \text{Max}$$

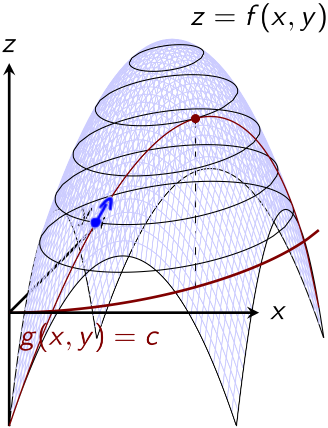
$$\frac{(2x) : 2x}{(2x + y) : 2x} = \frac{1}{1 + \frac{y}{2x}}$$

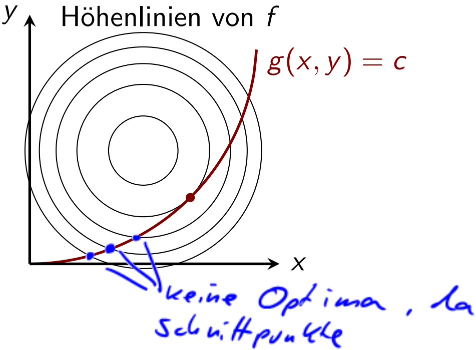
$$\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(x^2 + xy + y^2 - 3\right)$$



18.4 Warum die Lagrange-Methode funktioniert

Ein geometrisches Argument





Der Graph von $g(x, y) = c$ ist im Optimum tangential zu einer Höhenlinie von f.

$\Rightarrow$ Die Steigungen des Graphen und der Höhenlinie stimmen überein.

Ein analytisches Argument

Die Gleichung $f(x, y) = \bar{z}$ und die Nebenbedingung $g(x, y) = c$ definieren Höhenlinien von f und g.

Die Steigungen dieser Höhenlinien sind definiert durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1'(x, y)}{f_2'(x, y)} \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{g_1'(x, y)}{g_2'(x, y)}$$

Im Optimum (x, y) sind die Höhenlinien von f und g tangential, sie haben also die gleiche Steigung:

$$-\frac{f_1'(x, y)}{f_2'(x, y)} = -\frac{g_1'(x, y)}{g_2'(x, y)}$$

Ein analytisches Argument $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = f_1'(x,y) - \lambda \cdot g_1'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f_1'(x,y)}{g_1'(x,y)}$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = f_2'(x,y) - \lambda \cdot g_2'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f_2'(x,y)}{g_2'(x,y)}$$

Demnach muss gelten:

$$\frac{f_1'(x,y)}{g_1'(x,y)} = \frac{f_2'(x,y)}{g_2'(x,y)} \quad \Big| \cdot (-1) \cdot g_1'(x,y) : f_2'(x,y)$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur Tangentialbedingung:

$$-\frac{f_1'(x,y)}{f_2'(x,y)} = -\frac{g_1'(x,y)}{g_2'(x,y)}$$

Nichtnegativitätsbedingungen

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften fordern oft, dass Nebenbedingungen in Ungleichheit erfüllt werden müssen.

Die häufigste Nebenbedingung in Ungleichheit ist die **Nichtnegativitätsbedingung**.

Für diesen Fall kann die entsprechende Bedingung erster Ordnung sehr leicht angepasst werden.

Nichtnegativitätsbedingungen

Optimierungsproblem

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ u.d.B. } g(x,y) = c \;\&\; x \geq 0$$

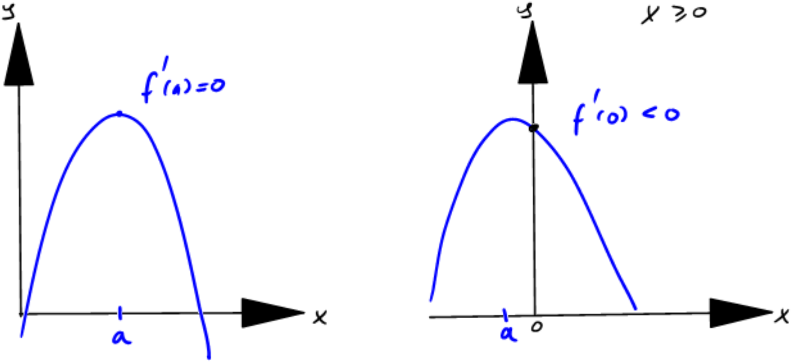
Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\mathcal{L}'_1(x,y) \leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2(x,y) = 0$$



Bedingung 1. Ordnung

falls $x^* > 0 \Rightarrow f'(x^*) = 0$

falls $x^* = 0 \Rightarrow f'(x^*) \leq 0$

Beispiel 2: Präferenzen mit Sättigungspunkt

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; -(x-M)^2-(y-5)^2 \text{ u.d.B. } x \geq 0$$

1)

$$\mathcal{L}(x,y) = -(x-M)^2-(y-5)^2$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

2) 3)

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = -2(x-M) \leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x-M \geq 0 \Leftrightarrow x \geq M$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = -2(y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow y-5=0 \Leftrightarrow \boxed{y=5}$$

Fall

$M > 0$

$x \geq M$

$\Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow \boxed{x = M}$

Fall

$M \leq 0$

$x \geq M$

~~Unterfall~~

$\cancel{x > 0}$

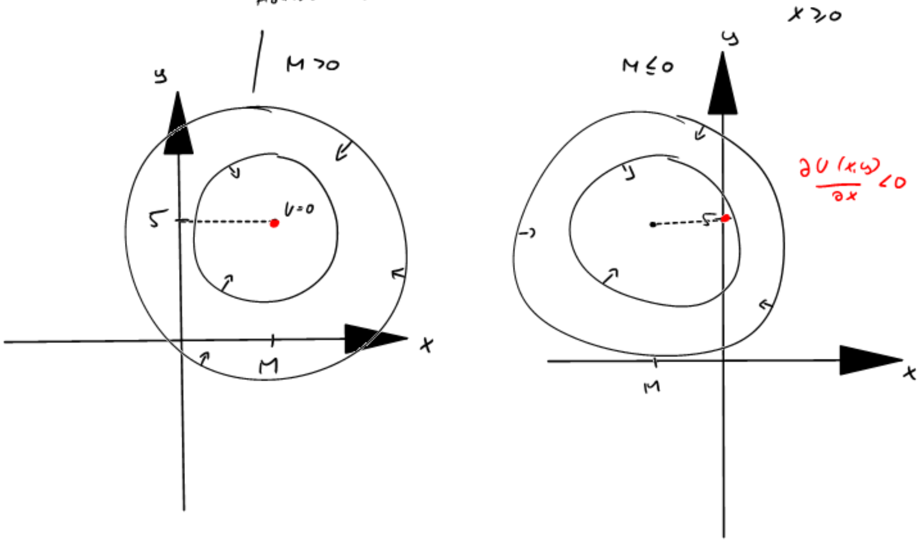
$\cancel{\Rightarrow x = M}$ ↯

Unterfall

$x=0$

$0 \geq M$ ✓

Höhenlinien von $U(x,y) = -(x-M)^2 - (y-5)^2$



Zusammenfassung

- Lagrange-Multiplikatoren & Lagrange-Funktion
- Notwendige Bedingungen erster Ordnung
- Lagrange-Multiplikatoren als Schattenpreise
- Tangentialbedingung
- Nichtnegativitätsbedingungen

Notenskala Klausur (90 Min)