Vorlesung zu Kapitel 17:[1]

Optimierung ohne Nebenbedingungen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

17.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

17.3 Lokale Extremstellen

17.4 Lineare Modelle mit quadratischer Zielfunktion

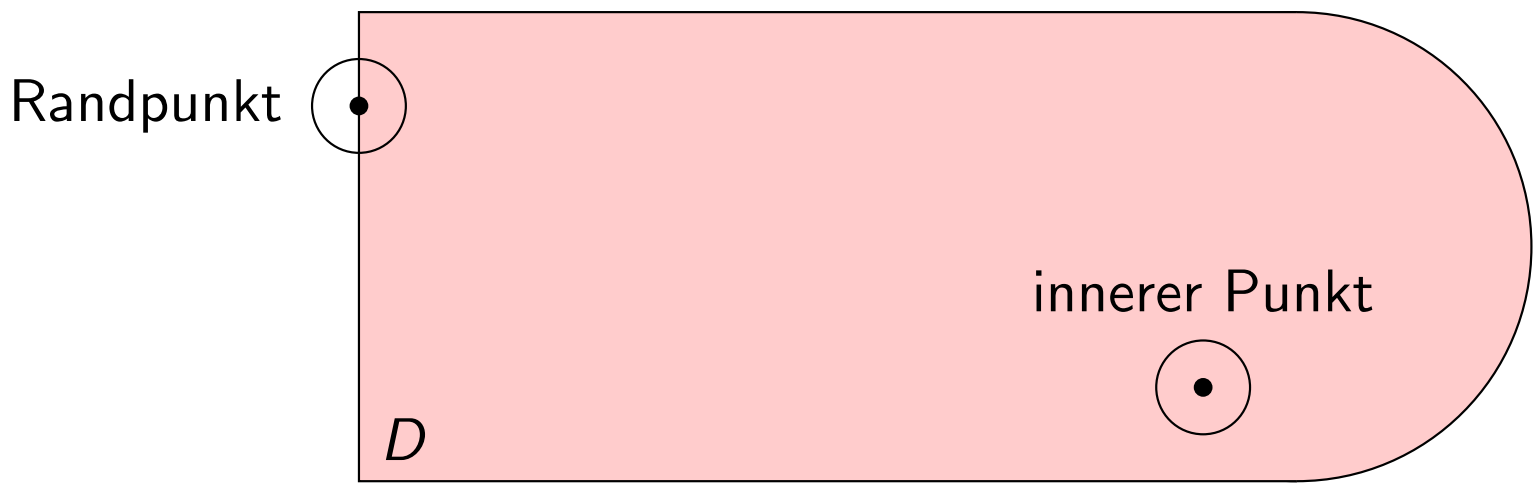
17.5 Der Extremwertsatz

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Definitionen: Innerere Punkte & Randpunkte in der Ebene

Um einen **innerer Punkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert ein Kreis, der vollständig in D liegt.

Um einen **Randpunkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert kein Kreis, der vollständig in D liegt.



Notwendige Bedingungen für innere Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Die Funktion f kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum in einem inneren Punkt (x_0, y_0) ihres Definitionsbereichs D annehmen, wenn dieser eine **stationäre Stelle** ist – d.h. wenn der Punkt $(x, y) = (x_0, y_0)$ die zwei folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f_1'(x, y) = 0, \text{ und } f_2'(x, y) = 0$$

Diese werden **Bedingungen erster Ordnung** genannt.

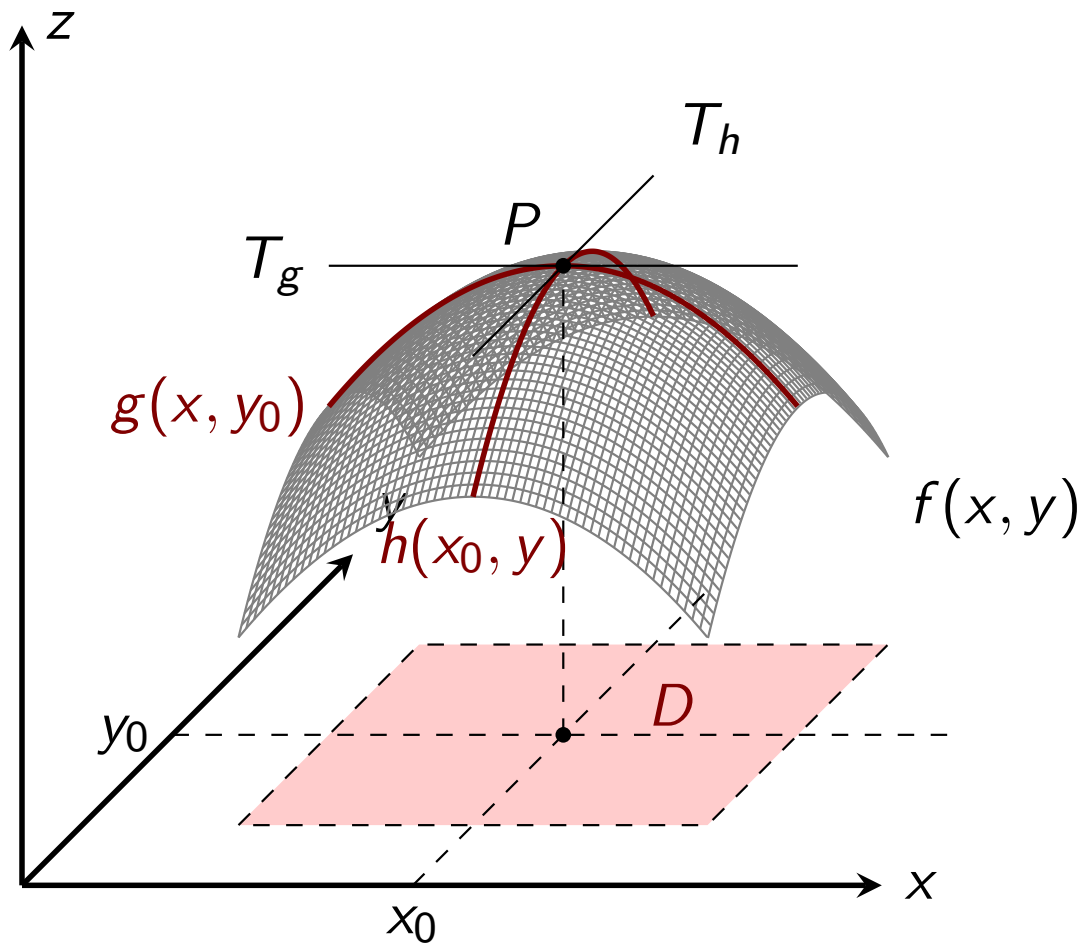
Beispiel 17.1.1

Die Funktion f sei für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$$

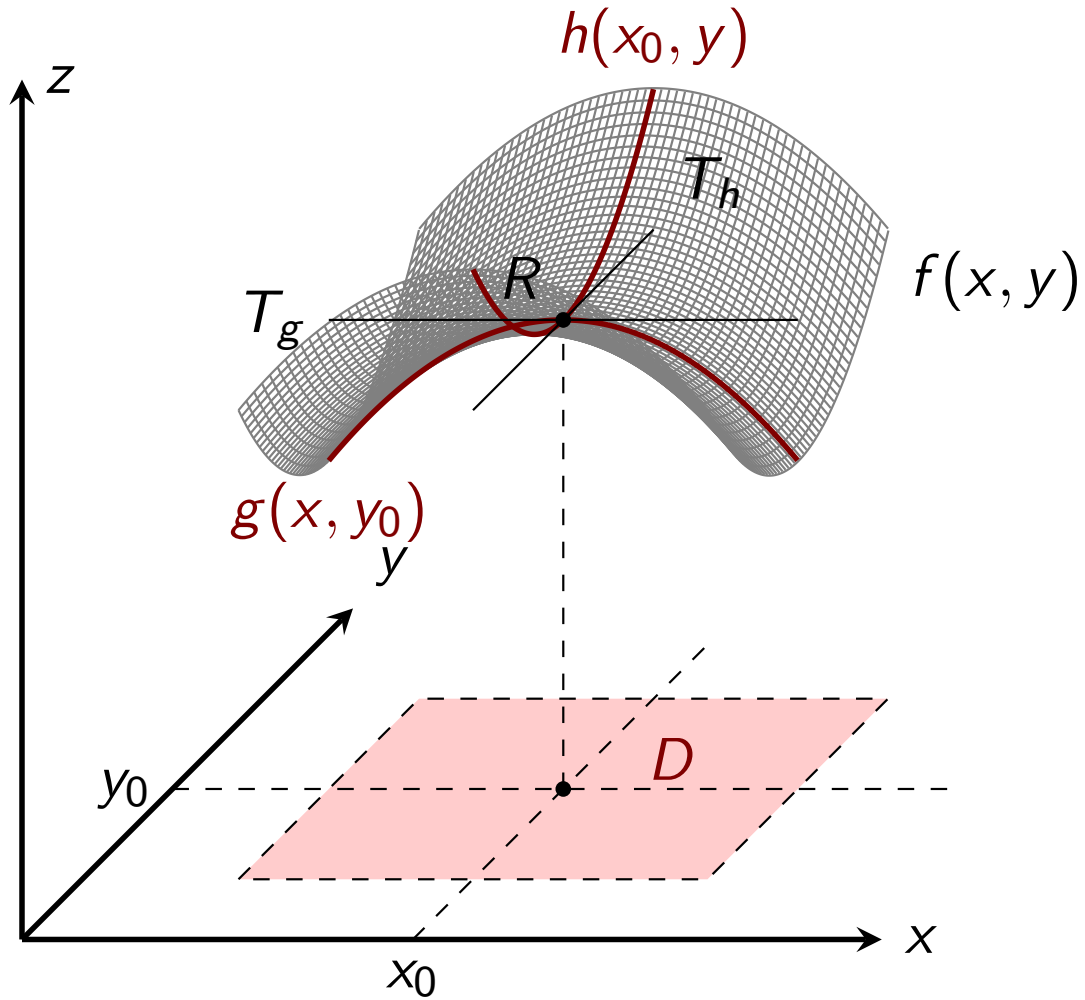
Setze voraus, dass f eine Maximumstelle hat und bestimme diese.

Maximumspunkt P, stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g: $f_1'(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h: $f_2'(x_0, y_0) = 0$

Sattelpunkt R, stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g: $f_1'(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h: $f_2'(x_0, y_0) = 0$

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

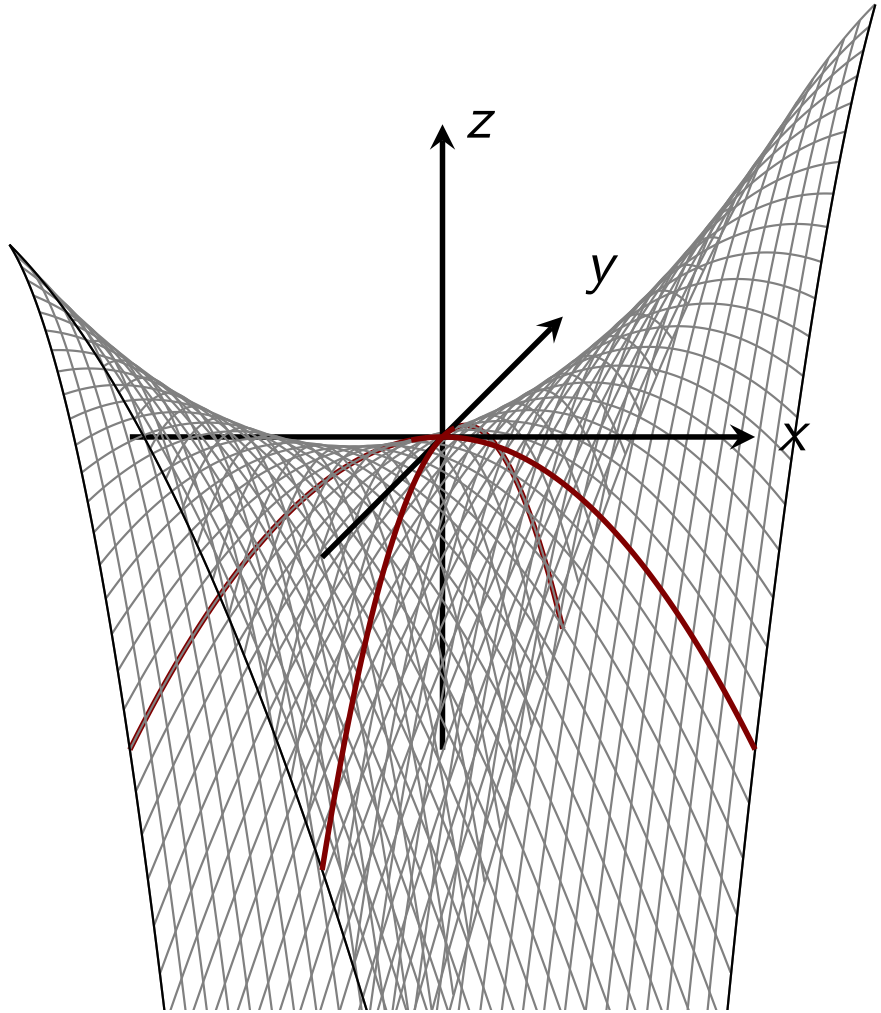
Sei die Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Variablen definiert auf einer konvexen Menge D und sei (x_0, y_0) eine **innere stationäre Stelle** in D. Dann gilt:

a) Falls die Funktion f konkav ist,
ist (x_0, y_0) eine Maximumstelle.

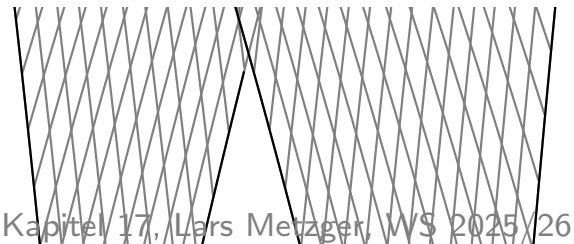
b) Falls die Funktion f konvex ist,
ist (x_0, y_0) eine Minimumstelle.

Diese Bedingungen sind also identisch zum Fall von Funktionen einer Variablen!

$$f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2$$



$f''_{11} = -2$ und $f''_{22} = -2$ sind negativ, f ist aber nicht konkav!



Beispiel 17.1.4 (Gewinnmaximierung)

Die Gewinnfunktion einer Firma sei gegeben durch

$$\pi(x, y) = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} - 1,2 \cdot x - 0,6 \cdot y$$

Wie lautet das Gewinnmaximum (falls es eines gibt)?

Bestätige, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

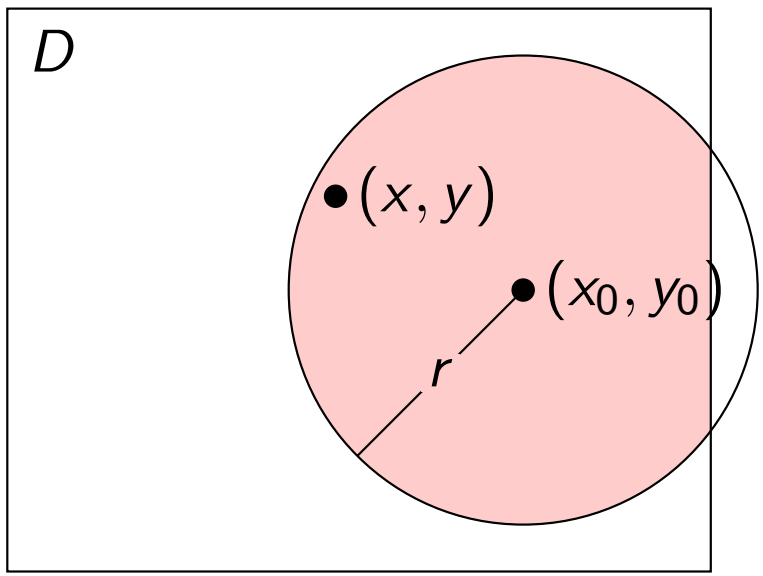
17.3 Lokale Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Der Punkt (x_0, y_0) ist eine **lokale Maximumstelle** von f in der Menge D, wenn es eine Zahl $r > 0$ gibt, sodass $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle Paare (x, y) in D mit geringerem Abstand zu (x_0, y_0), als r.

Wenn die Ungleichung strikt ist für alle $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, dann ist (x_0, y_0) eine **strikte** lokale Maximumstelle.

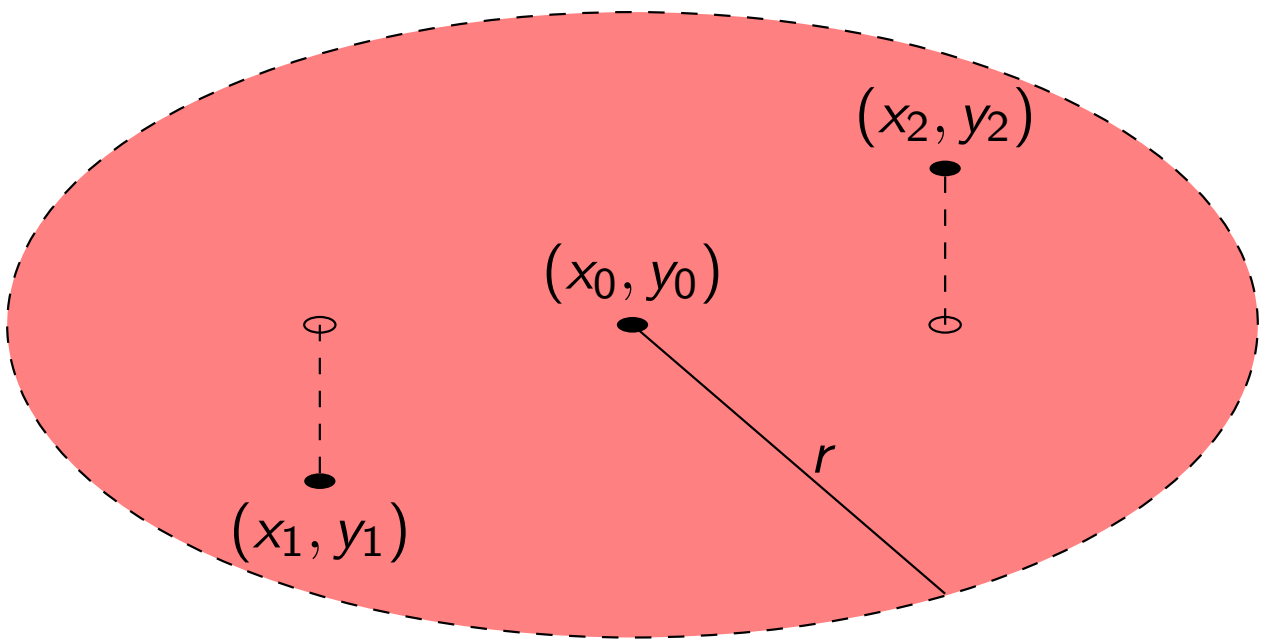
Ist die Ungleichung umgekehrt, handelt es sich bei (x_0, y_0) um eine **lokale Minimumstelle**, die ggf. strikt ist.



Sattelstelle

Eine stationäre Stelle, welche keine lokale Extremstelle ist, heißt Sattelstelle.

Eine Sattelstelle (x_0, y_0) hat die Eigenschaft, dass es für jede Zahl $r > 0$ zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) in D im Umkreis r von (x_0, y_0) gibt mit $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$.



Test der zweiten Ableitungen auf lokale Extrema

Sei f zweimal stetig differenzierbar und sei (x_0, y_0) eine innere stationäre Stelle.

Es sei f'' die Hessematrix von f und
$A(x_0, y_0) = f''_{11}(x_0, y_0) f''_{22}(x_0, y_0) - f''_{21}(x_0, y_0) f''_{12}(x_0, y_0)$.

(a) Wenn $f''_{11}(x_0, y_0) < 0$ und $A(x_0, y_0) > 0$,
dann ist (x_0, y_0) eine strikte lokale Maximumstelle.

(b) Wenn $f''_{11}(x_0, y_0) > 0$ und $A(x_0, y_0) > 0$,
dann ist (x_0, y_0) eine strikte lokale Minimumstelle.

(c) Wenn $A(x_0, y_0) < 0$, dann ist (x_0, y_0) eine Sattelstelle.

(d) Wenn $A(x_0, y_0) = 0$, dann kann (x_0, y_0) eine lokale Maximumstelle, eine lokale Minimumstelle oder eine Sattelstelle sein.

17.4 Beispiel: Diskriminierende Monopolistin

Die Mensa kann Essen an Studierende (S) und Mitarbeitende (M) zu unterschiedlichen Preisen p_S und p_M verkaufen.

Die Nachfragefunktionen für Mensaessen lauten:

$$D_S(p_s) = \max\{6000 - 1000p_s, 0\}$$

und

$$D_M(p_M) = \max\{1000 - 100p_M, 0\}$$

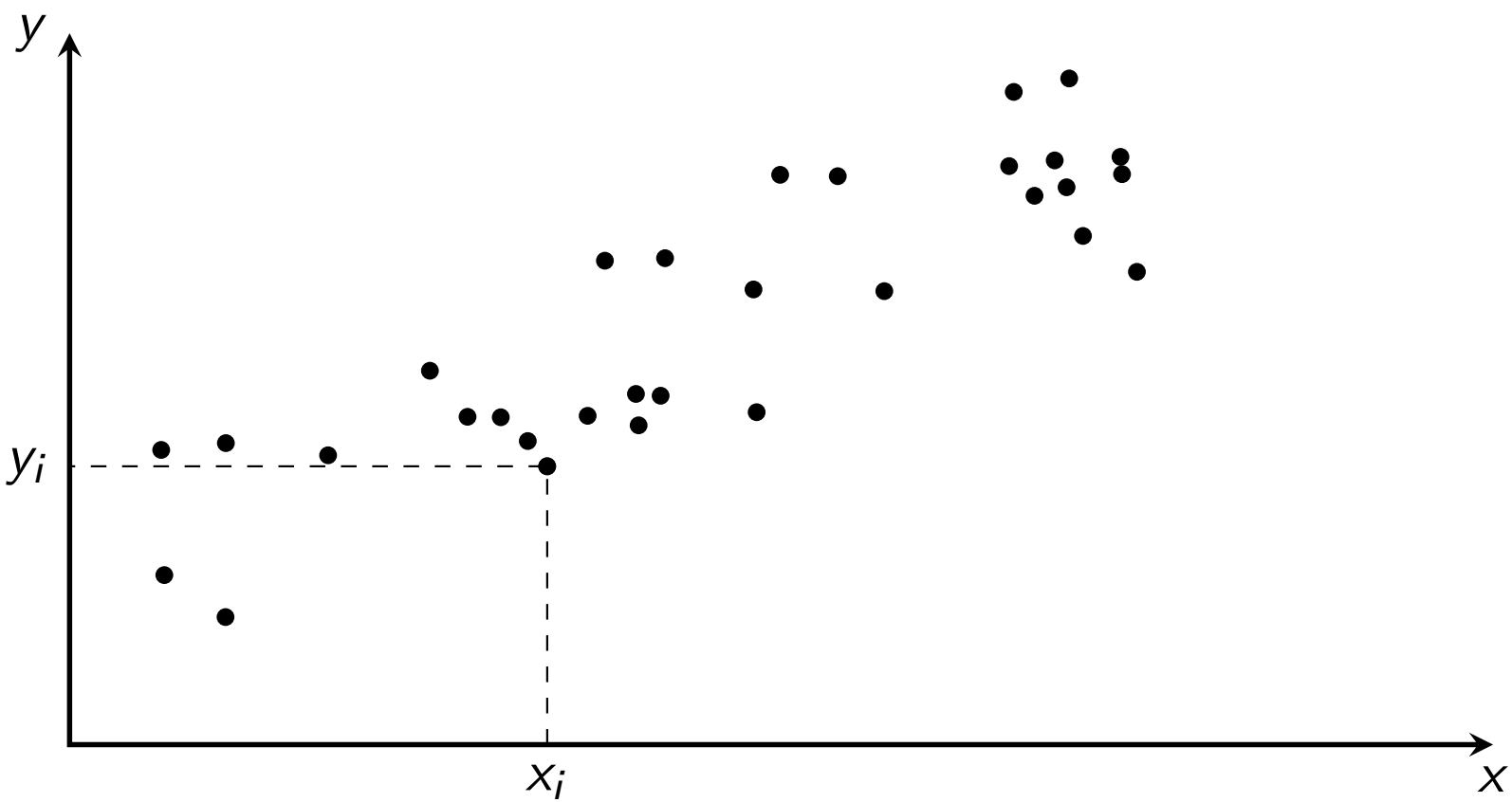
Pro Essen fallen konstante Stückkosten von 1 an.

Welche Preise p_S^* und p_M^* maximieren den Gewinn der Mensa?

Welcher Preis p^* maximiert den Gewinn der Mensa, falls Preisdiskriminierung verboten ist?

17.4 Einfache Lineare Regression

Schätzung des statistischen Zusammenhangs zwischen einer erklärenden Variablen („Regressor“, x) und einer erklärten Variablen („Regressand“, y).



Einfache Lineare Regression

Stichprobe mit Umfang n:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}\text{: Regressand}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}\text{: Regressor}}$$

Es gelte $x_i \neq x_j$ für mindestens ein $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Modell:

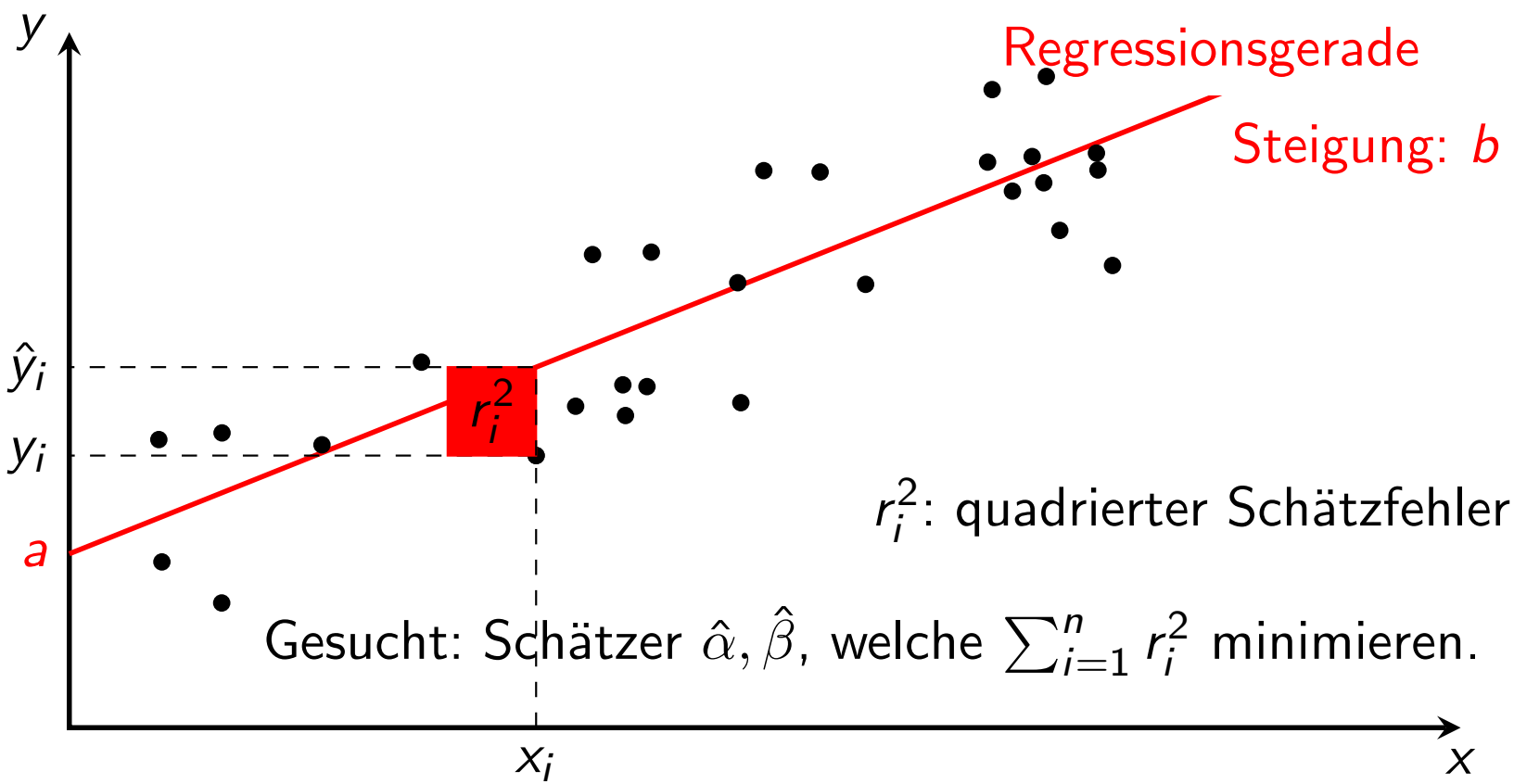
$$y_i = \alpha + x_i \cdot \beta + \epsilon_i \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

Unbekannte Parameter α, β
Unbekannter Störterm ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$

Einfache Lineare Regression – Grafische Darstellung

Vermutete Parameter: a, b $\quad \rightarrow$ Prognose $\hat{y}_i = a + bx_i$

Schätzfehler (hängt von a, b ab): $r_i = y_i - \hat{y}_i$



Einfache Lineare Regression

Zielfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - b \cdot x_i)^2$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_1'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b \cdot x_i) \\ f_2'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b \cdot x_i) \cdot x_i \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$\begin{pmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}$$

Einfache Lineare Regression

Sei $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ein stationärer Punkt von f.

Hinreichende Bedingungen für ein Minimum:

- $f''_{11} = 2n > 0$ ✓
- $f''_{22} = 2n\overline{xx} > 0$ ✓
- $f''_{11} f''_{22} = (2n)^2 \cdot \overline{xx} > (2n)^2 \cdot \bar{x}^2 = f''_{12} f''_{21} \Leftrightarrow \overline{xx} - \bar{x}\bar{x} > 0$ ✓

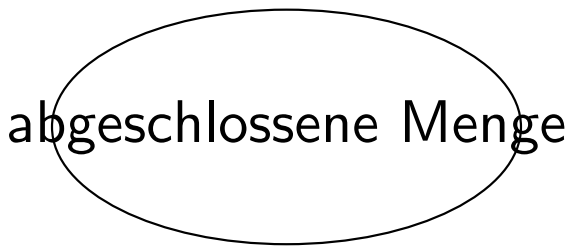
$\Rightarrow$ f ist streng konvex in a, b

$\Rightarrow$ der innere stationäre Punkt $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ist eine Minimumstelle.

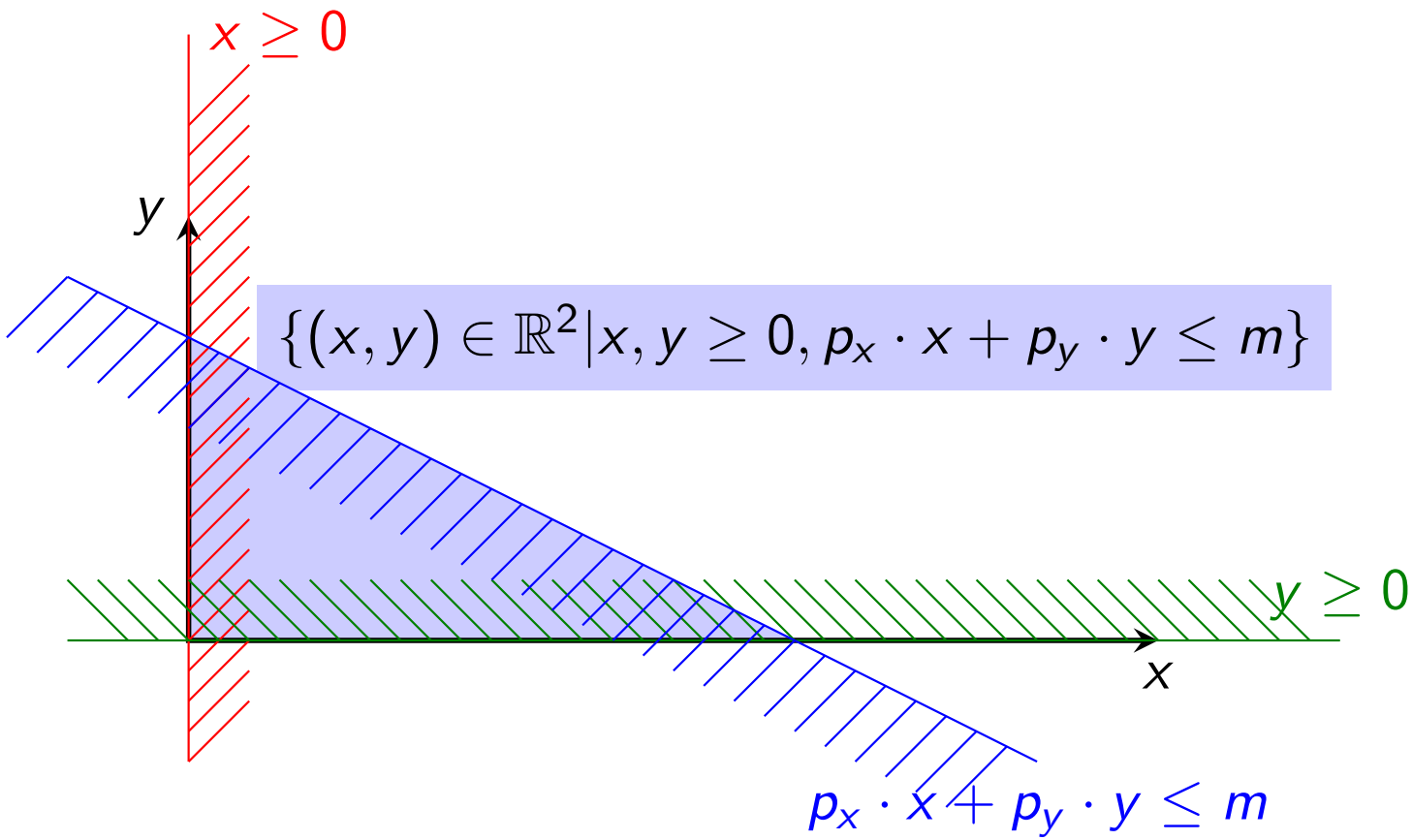
17.5 Extremwertsatz: offene und abgeschlossene Menge

Eine Menge D ist **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

Eine Menge D ist **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.



Beispiel: Budgetmenge



Schwache Ungleichungen:

$\Rightarrow$ Alle Randpunkte sind in der Budgetmenge enthalten.

$\Rightarrow$ Die Budgetmenge ist abgeschlossen.

17.5 Extremwertsatz: beschränkte Menge

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **beschränkt**, falls es einen Kreis mit endlichem Radius $r < \infty$ gibt, der D vollständig enthält.

Beispiel Budgetmenge:

Wähle $r = \max\left\{\frac{m}{p_x}, \frac{m}{p_y}\right\}$. Der Mittelpunkt des Kreises sei $(0, 0)$.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge heißt **kompakt**.

17.5 Der Extremwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert eine Stelle $(a, b) \in D$, an der f ein Minimum hat und es existiert eine Stelle $(c, d) \in D$, an der f ein Maximum hat:

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \; \forall \; (x, y) \in D$$

Bemerkung:

Die Bedingungen abgeschlossen und beschränkt an D sind hinreichend für die Existenz von Extremstellen, aber nicht notwendig.

So hat zum Beispiel für $D = \mathbb{R}^2_{\geq}$ die Funktion $f(x, y) = -x - y$ ein Maximum an der Stelle $(0, 0)$, $\mathbb{R}^2_{\geq}$ ist aber nicht beschränkt.

Das Auffinden der Maxima und Minima

Um die Maximum- und Minimumwerte einer differenzierbaren Funktion f, die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist, zu finden, gehe wie folgt vor:

(i) Bestimme alle stationären Stellen von f im Innern von D.

(ii) Bestimme den größten und kleinsten Wert von f auf allen Teilstücken des Randes von D und die zugehörigen Stellen.

(iii) Berechne die Werte der Funktion an allen Stellen, die in (i) und (ii) gefunden wurden. Der größte Funktionswert ist der Maximalwert von f in D. Der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in D.

Ein nützliches Resultat

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und Wertebereich $R = f(D)$.

Sei $g : R \to \mathbb{R}$ und sei (x^*, y^*) in D.

Definiere $h : D \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = g(f(x, y))$.

(a) Wenn g monoton wachsend ist und (x^*, y^*) die Funktion f maximiert, dann maximiert dieselbe Stelle (x^*, y^*) auch h.

(b) Wenn g strikt monoton wachsend ist, dann maximiert (x^*, y^*) die Funktion f genau dann, wenn (x^*, y^*) die Funktion h maximiert.

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Für $(x, r) \in D$ bezeichne x eine Variable und r einen Parameter.

Für das Optimierungsproblem

$$\max_x \; f(x, r)$$

bezeichne $x^*(r)$ den Wert x, welcher f bei gegebenem Parameter r maximiert.

Definiere die **Optimalwertfunktion**

$$f^*(r) := f(x^*(r), r)$$

Beispiel: Gewinnmaximierung

Outputmenge $x \geq 0$, Preis r, Kosten $C(x) = x^2$.

$$\Rightarrow \pi(x, r) = rx - x^2$$

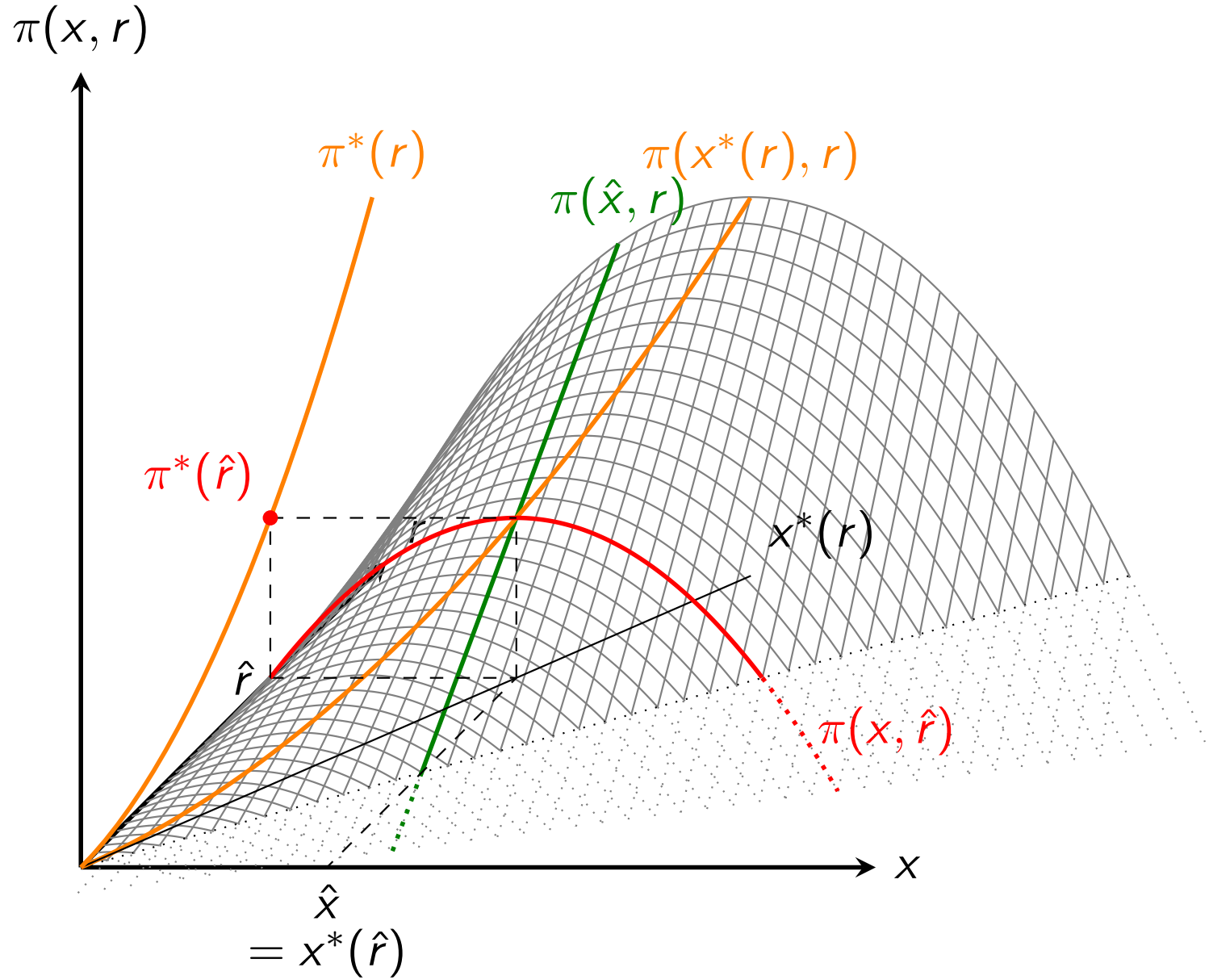
Bedingung erster Ordnung für x:

$$\pi_1'(x, r) = r - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^*(r) = \frac{r}{2}$$

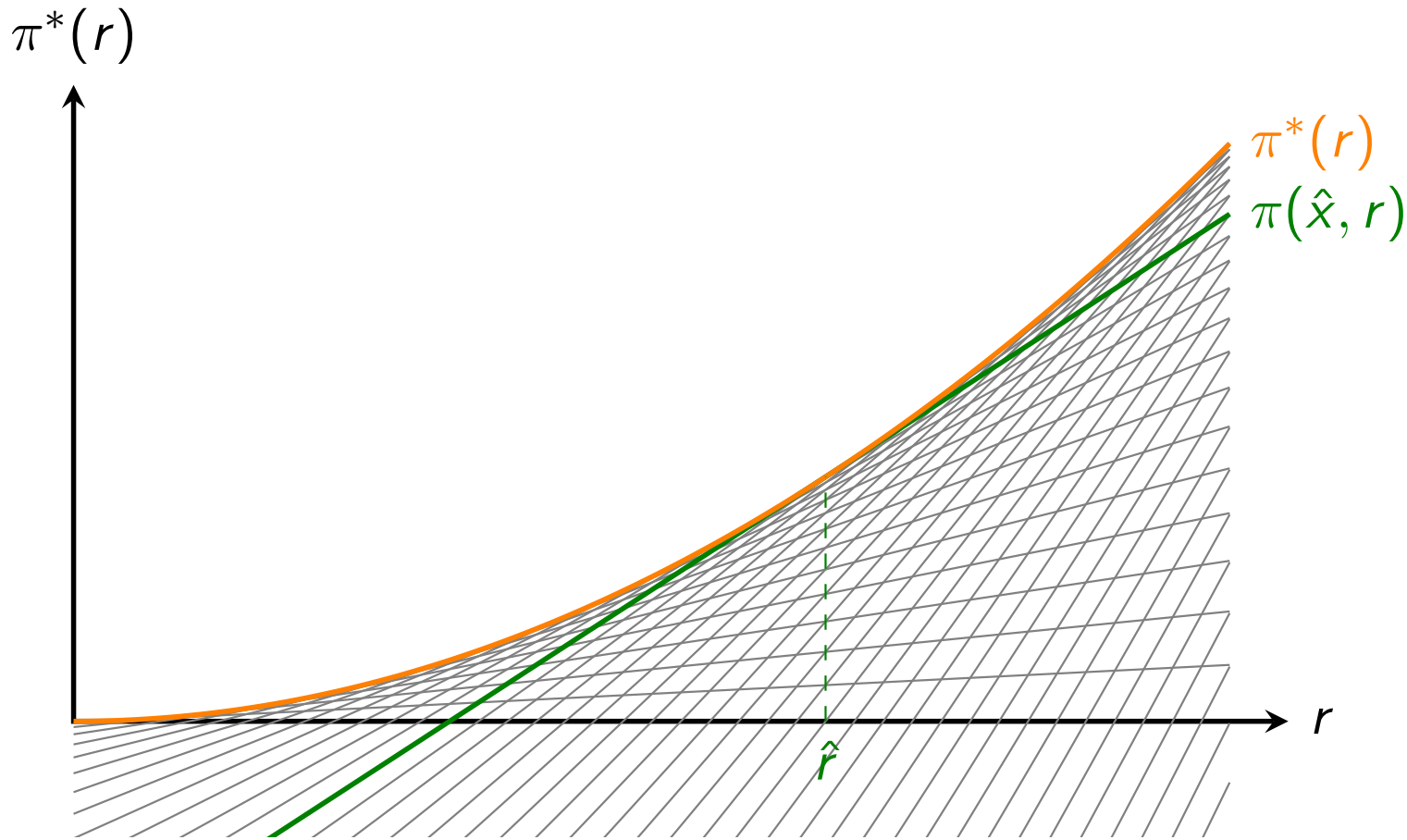
Optimalwertfunktion:

$$\pi^*(r) = \pi(x^*(r), r) = r\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$$

Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



An der Stelle $\hat{r}$ sind $\pi^*(r)$ und $\pi(\hat{x}, r)$ tangential!

Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

Es bezeichne x eine Variable und r einen Parameter.

Sei $x^*(r)$ der Wert von x, der $f(x, r)$ für r maximiert und sei $(x^*(r), r)$ ein innerer Punkt von D. Für $f^*(r) := f(x^*(r), r)$ gilt dann:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Beweis:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} \frac{dx^*(r)}{dr} + \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Da $x^*(r)$ der Wert von x ist, welcher $f(x, r)$ maximiert, gilt $\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} = 0$.

Anwendung Envelope-Theorem auf Beispiel

$$\pi(x, r) = rx - x^2$$

Optimale Menge $x^*(r)$ bei gegebenem Preis r:

$$x^*(r) = \frac{r}{2}$$

Optimalwertfunktion

$$\pi^*(r) = \frac{r^2}{4}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \pi(x, r)}{\partial r} = x$$

und

$$\frac{d\pi^*(r)}{dr} = \frac{r}{2}$$

Zusammenfassung

- Notwendige Bedingung: stationäre Stelle
- Hinreichende Bedingung für stationäre Stellen:
  Funktion konkav $\Rightarrow$ Maximum
  Funktion konvex $\Rightarrow$ Minimum
- Lokale Extremstellen, Sattelstellen
- Beispiel: Gewinnmaximierung, lineare Regression
- Extremwertsatz
  offene/abgeschlossene und beschränkte Mengen
- Envelope-Theorem
  Variablen, Parameter & Optimalwertfunktion