Vorlesung zu Kapitel 17:[1]

Optimierung ohne Nebenbedingungen

Moodle

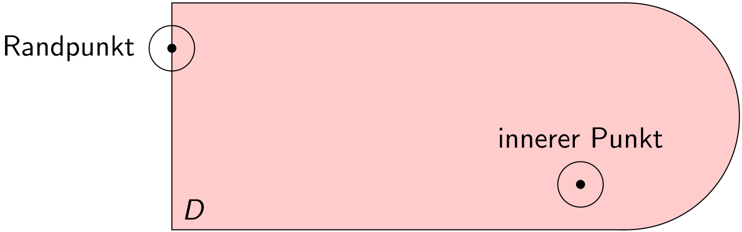
Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Definitionen: Innerere Punkte & Randpunkte in der Ebene

Um einen **innerer Punkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert ein Kreis, der vollständig in D liegt.

Um einen **Randpunkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert kein Kreis, der vollständig in D liegt.



Notwendige Bedingungen für innere Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Die Funktion f kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum in einem inneren Punkt (x_0, y_0) ihres Definitionsbereichs D annehmen, wenn dieser eine **stationäre Stelle** ist – d.h. wenn der Punkt $(x, y) = (x_0, y_0)$ die zwei folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f_1'(x, y) = 0, \text{ und } f_2'(x, y) = 0$$

Diese werden **Bedingungen erster Ordnung** genannt.

$f: D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar

hinreichende Bedingung

(x,y) innere Extremstelle

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} f_1'(x,y) &= 0 \\ f_2'(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

notwendige Bedingung

Beispiel 17.1.1

Die Funktion f sei für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$$

Setze voraus, dass f eine Maximumstelle hat und bestimme diese.

(notwendige Beding 1. Ordnung BEO, FOC)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -4x - 2y + 36 \overset{!}{=} 0 \quad i)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2x - 4y + 42 \overset{!}{=} 0 \quad ii) \text{ BEO}$$

Löse zunächst i) und ii) nach y auf:

$$i) \iff -4x + 36 = 2y \iff \boxed{-2x + 18 = y} \quad i')$$

$$ii) \iff -2x + 42 = 4y \iff \boxed{-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{21}{2} = y} \quad ii')$$

$$\boxed{-2x + 18 = y} \quad i')$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}x + \frac{21}{2} = y} \quad ii')$$

$$\Rightarrow \quad -2x + 18 = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2} \qquad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -4x + 36 = -x + 21 \qquad | +4x \; -21$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{36 - 21}_{15} = \underbrace{4x - x}_{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 5}$$

$$\Rightarrow \quad y = -2 \cdot 5 + 18 = -10 + 18 = 8$$

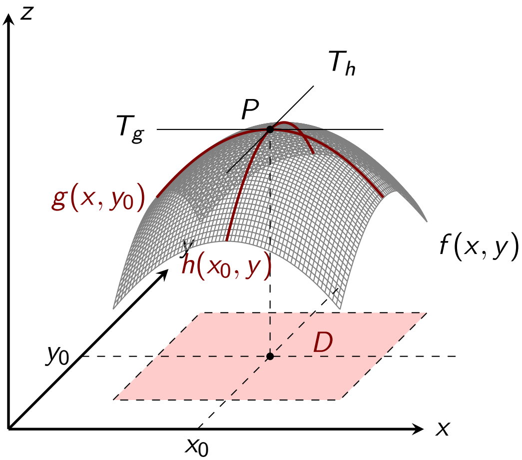
$$\boxed{y = 8}$$

Es gilt also $f_1'(5,8) = 0$ und $f_2'(5,8) = 0$

$\Rightarrow$ es gibt nur eine stationäre Stelle

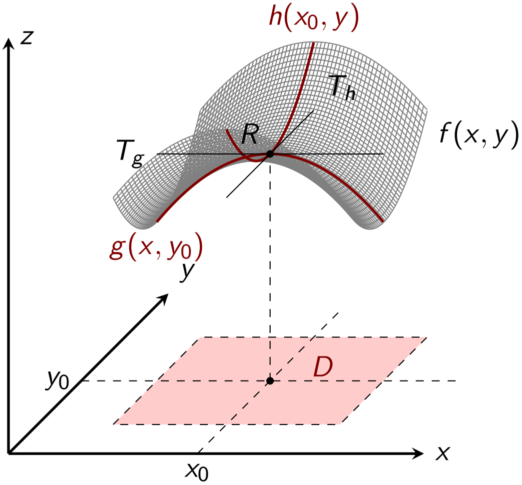
$\Rightarrow$ Dies muss also das Maximum sein.

Maximumspunkt P, stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g: $f'_1(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h: $f'_2(x_0, y_0) = 0$

Sattelpunkt R, stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g: $f_1'(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h: $f_2'(x_0, y_0) = 0$

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

Sei die Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Variablen definiert auf einer konvexen Menge D und sei (x_0, y_0) eine **innere stationäre Stelle** in D. Dann gilt:

a) Falls die Funktion f konkav ist,
ist (x_0, y_0) eine Maximumstelle.

b) Falls die Funktion f konvex ist,
ist (x_0, y_0) eine Minimumstelle.

Diese Bedingungen sind also identisch zum Fall von Funktionen einer Variablen!

$f: D \to \mathbb{R} \quad , \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

(x_0, y_0) stationär

notwendige Bedingung | hinreichende Bedingung

(x_0, y_0) Max-Stelle $\Longleftarrow$ f konkav

(x_0, y_0) Min-Stelle $\Leftarrow$ f konvex

(hinreichende) Bedingung 2. Ordnung

zur Erinnerung

f zweimal differenzierbar, dann ist f konkav, falls

$f''_{11} \leq 0$, $f''_{22} \leq 0$ $\qquad f''_{11} f''_{22} \geq f''_{12} f''_{21}$

f ist konvex, falls

$f''_{11} \geq 0$, $f''_{22} \geq 0$ $\qquad f''_{11} f''_{22} \geq f''_{21} f''_{12}$

ist f aus BSP 17.1.1 konkav

(erfüllt f $f''_{11} \le 0$, $f''_{22} \le 0$ $f''_{11} f''_{22} \ge f''_{12} f''_{21}$?)

$f'_1(x,y) = -4x - 2y + 36$, $f'_2(x,y) = -2x - 4y + 42$

$f''_{11} = -4 \le 0$ ✓ $f''_{21} = -2$ $(-4)\cdot(-4) \ge (-2)\cdot(-2)$

$\Leftrightarrow 16 \ge 4$ ✓

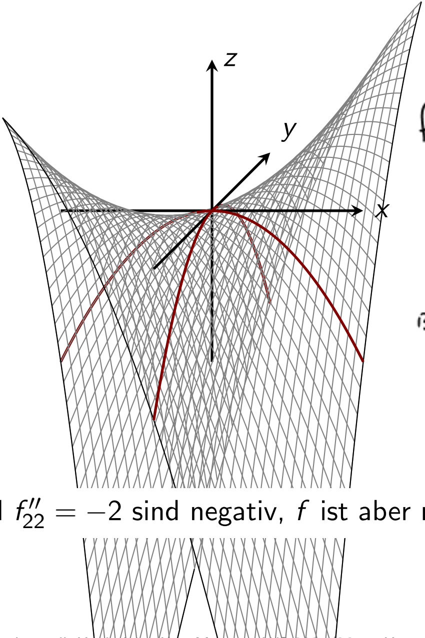
$f''_{12} = -2$ $f''_{22} = -4 \le 0$ ✓

f ist konkav, stationäre Stelle $(x,y) = (5,8)$

ist eine Max-Stelle.

$f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$

$f_1' = 3y - 2x \quad , \quad f_2' = 3x - 2y$



$$f'' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$(-2) \cdot (-2) < 3 \cdot 3$

$4 < 9$

Bedingung

$f_{11}'' \cdot f_{22}'' \geq f_{21}'' \cdot f_{12}''$ ist verletzt

$f_{11}'' = -2$ und $f_{22}'' = -2$ sind negativ, f ist aber nicht konkav!

Beispiel 17.1.4 (Gewinnmaximierung)

Produktionsfunktion

Die Gewinnfunktion einer Firma sei gegeben durch

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Preis für Output

$$\pi(x,y) = 12 \cdot \underbrace{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}} - \underbrace{(1,2 \cdot x + 0,6 \cdot y)}_{\text{Kosten}}$$

Wie lautet das Gewinnmaximum (falls es eines gibt)?

Bestätige, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Bedingung erster Ordnung

$$\frac{\partial \pi(x,y)}{\partial x} = \overbrace{12 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}^{\text{Grenzerlös}} - \overbrace{1,2}^{\text{Grenz-kosten}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{BEO})$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{4}} = 1.2 \quad \Big| : 1,2 \quad \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{5 \cdot y^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial \pi(x,y)}{\partial y} = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} - 0.6 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{BEO})$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y^{\frac{3}{4}}} = 0.6 \quad \Big| : 3 \cdot y^{\frac{3}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^{\frac{1}{2}} = 0.2 \cdot y^{\frac{3}{4}}}$$

$$\left.\begin{aligned} 5y^{-\frac{1}{4}} &= x^{-\frac{1}{2}} \\ x^{\frac{1}{2}} &= 0.2\, y^{\frac{3}{4}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 5y^{\frac{1}{4}} = 0.2\, y^{\frac{3}{4}} \quad \Big| : y^{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 = 0.2\, y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{5}\, y^{\frac{1}{2}} \quad \Big| \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \quad y^{\frac{1}{2}} = 25$$

$$\overset{(y\geq 0)}{\Leftrightarrow} \quad y = 25^2$$

$$\Rightarrow \quad x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\left(25^2\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{5}\cdot 25^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{5}\, 25 \cdot 25^{\frac{1}{2}} = 5\cdot 25^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad x = 5^2\cdot 25 = 25\cdot 25 = 25^2$$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung der Bedingungen 1. Ordnung:

$(x, y) = (25^2, 25^2)$ $\Leftarrow$ innerer Punkt

Kann das Optimum auf dem Rand liegen?

Rand $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0 \text{ oder } y=0\} = R$

$\pi(x,y) \leq 0$ für alle $(x,y) \in R$

zum Beispiel für $(x,y) = (1,1)$:

$$\pi(x,y) = \underbrace{12 \cdot 1^{\frac{1}{4}} \cdot 1^{\frac{1}{2}}}_{12} \underbrace{- 1.2 \cdot 1 - 0.6 \cdot 1}_{-1.8} > 0$$

Hinreichende Bedingungen

$$\pi''_{11} \leq 0 \quad , \quad \pi''_{22} < 0 \quad , \quad \pi''_{11}\,\pi''_{22} \geq \pi''_{21} \cdot \pi''_{12}$$

$$\pi'_1 = 6\,x^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{4}} - 1{,}2 \qquad \pi'_2 = 3\,x^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{3}{4}} - 0.6$$

$$\pi''_{11} = \underbrace{6 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}\,y^{\frac{1}{4}}}_{<0} \qquad \pi''_{21} = \underbrace{6 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,\tfrac{1}{4}\,y^{-\frac{3}{4}}}_{=}$$

$$\pi''_{12} = \underbrace{3\,\tfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{3}{4}}}_{=} \qquad \pi''_{22} = \underbrace{3\,x^{\frac{1}{2}}\left(-\tfrac{3}{4}\right)y^{-\frac{7}{4}}}_{<0}$$

$$\pi''_{11} \cdot \pi''_{22} = -3\,x^{-\frac{3}{2}}\,y^{\frac{1}{4}}\left(-\tfrac{9}{4}\right)x^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{7}{4}} = \cancel{+}\frac{27}{4}\,x^{-1}\,y^{-\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{>}$$

$$\pi''_{21} \cdot \pi''_{12} = \frac{3}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{3}{4}} = \frac{9}{4}\,x^{-1}\,y^{-\frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow$ π ist streng konkav

$\Rightarrow$ stationäre Stellen sind Max-Stellen.

Kürzerer Lösungsweg:

Zielfunktion $A \cdot x^c \cdot y^d + ax + by$

Cobb-Douglas-Fkt ist streng konkav, falls $c + d < 1$

Lineare Funktion $ax + by$ ist konkav & konvex.

Resultat aus Kap. 8:

Die Summe konkaver Funktionen ist konkav.

Also ist $Ax^c y^d + ax + by$ konkav

hier: $A = 12$ $\quad a = -1{,}2$

$c = \frac{1}{4}$ $\quad b = 0{,}6$

$d = \frac{1}{2}$

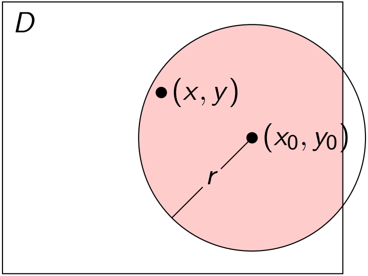
17.3 Lokale Extremstellen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Der Punkt (x_0, y_0) ist eine **lokale Maximumstelle** von f in der Menge D, wenn es eine Zahl $r > 0$ gibt, sodass $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ für alle Paare (x, y) in D mit geringerem Abstand zu (x_0, y_0), als r.

Wenn die Ungleichung strikt ist für alle $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, dann ist (x_0, y_0) eine **strikte** lokale Maximumstelle.

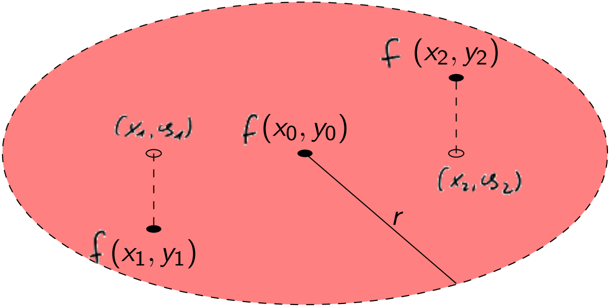
Ist die Ungleichung umgekehrt, handelt es sich bei (x_0, y_0) um eine **lokale Minimumstelle**, die ggf. strikt ist.



Sattelstelle

Eine stationäre Stelle, welche keine lokale Extremstelle ist, heißt Sattelstelle.

Eine Sattelstelle (x_0, y_0) hat die Eigenschaft, dass es für jede Zahl $r > 0$ zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) in D im Umkreis r von (x_0, y_0) gibt mit $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$.



Test der zweiten Ableitungen auf lokale Extrema

Sei f zweimal stetig differenzierbar und sei (x_0, y_0) eine innere stationäre Stelle. lin. Algebra „Determinante der Hessematrix"

Es sei f'' die Hessematrix von f und
$A(x_0, y_0) = f''_{11}(x_0, y_0) f''_{22}(x_0, y_0) - f''_{21}(x_0, y_0) f''_{12}(x_0, y_0)$.

(a) Wenn $f''_{11}(x_0, y_0) < 0$ und $A(x_0, y_0) > 0$, dann ist (x_0, y_0) eine strikte lokale Maximumstelle.

(b) Wenn $f''_{11}(x_0, y_0) > 0$ und $A(x_0, y_0) > 0$, dann ist (x_0, y_0) eine strikte lokale Minimumstelle.

(c) Wenn $A(x_0, y_0) < 0$, dann ist (x_0, y_0) eine Sattelstelle.

(d) Wenn $A(x_0, y_0) = 0$, dann kann (x_0, y_0) eine lokale Maximumstelle, eine lokale Minimumstelle oder eine Sattelstelle sein.

17.4 Beispiel: Diskriminierende Monopolistin

Die Mensa kann Essen an Studierende (S) und Mitarbeitende (M) zu unterschiedlichen Preisen p_S und p_M verkaufen.

Die Nachfragefunktionen für Mensaessen lauten:

$$D_S(p_s) = \max\{6000 - 1000p_s, 0\}$$

und

$$D_M(p_M) = \max\{1000 - 100p_M, 0\}$$

Pro Essen fallen konstante Stückkosten von 1 an.

Welche Preise p_S^* und p_M^* maximieren den Gewinn der Mensa?

Welcher Preis p^* maximiert den Gewinn der Mensa, falls Preisdiskriminierung verboten ist?

$$\pi(p_S, p_M) = \underbrace{D_S(p_S)\cdot p_S + D_M(p_M)\cdot p_M}_{\text{Erlös}} - D_S(p_S) - D_M(p_M)$$

ignoriere max bei Nachfrage

$$= (6000-1000p_S)(p_S-1) + (1000-100p_M)\cdot(p_M-1)$$

$$= 100\left[(60-10p_S)(p_S-1) + (10-p_M)(p_M-1)\right]$$

<u>schritt 1 BEO:</u>

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_S} = 100\left[-10\cdot(p_S-1) + (60-10p_S)\cdot 1\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -10p_S + 10 + 60 - 10p_S = 0 \qquad |:10$$

$$\Leftrightarrow \quad -p_S + 1 + 6 - p_S = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 = 2p_S$$

$$\Leftrightarrow \quad p_S = \frac{7}{2}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_M} = \boxed{100\left[-1\,(p_M - 1) + (10 - p_M)\cdot 1\right]} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \; -p_M + 1 + 10 - p_M = 0$$

$$\Leftrightarrow \; 11 = 2p_M$$

$$\Leftrightarrow \; p_M = \frac{11}{2}$$

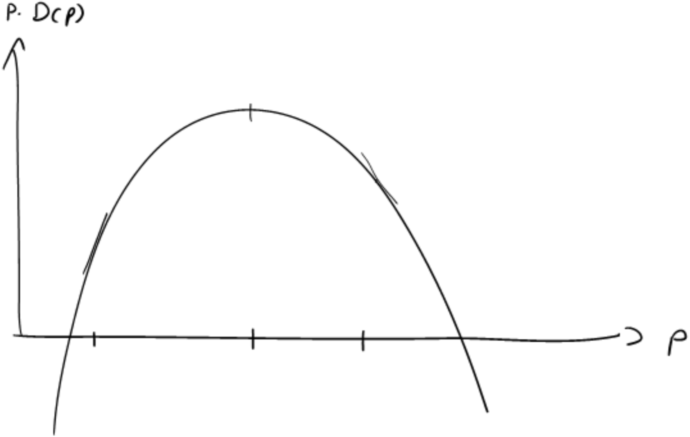
Schritt 2 hinreichende Bedingungen

$$\pi'' = \begin{pmatrix} 100\cdot(-10) + 100(-10) = -2000 < 0 & 0 \\ 0 & 100\cdot(-1) + 100(-1) = -200 < 0 \end{pmatrix}$$

$0 \cdot 0 = 0$

$-2000 \cdot (-200) = 400.000$

$$\Rightarrow \; \pi \text{ ist konkav}, \; (p_S^*, p_M^*) = \left(\frac{2}{2}, \frac{11}{2}\right) \text{ Max-Stelle}$$


p· D(p)
p

Falls die Mensa nur einen Preis p setzen darf:

$$\pi(p) = (6000-1000p)(p-1) + (1000-100p)\cdot(p-1)$$

$$= (7000-1100\cdot p)(p-1)$$

$$\pi'(p) = -1100(p-1) + (7000-1100p)\,1$$

$$= -1100p + 1100 + 7000 - 1100p$$

$$= -2200p + 8100 \overset{!}{=} 0$$

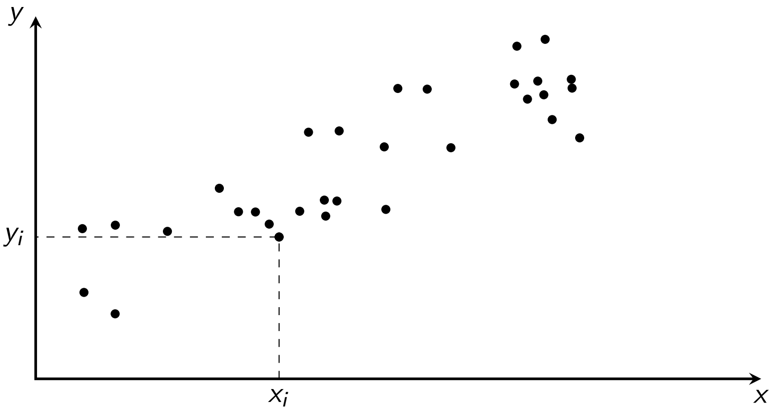
$$\Leftrightarrow -22p + 81 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{81}{22} \approx 4$$

Behauptung: hier Gewinn kleiner.

17.4 Einfache Lineare Regression

Schätzung des statistischen Zusammenhangs zwischen einer erklärenden Variablen („Regressor“, x) und einer erklärten Variablen („Regressand“, y).



Einfache Lineare Regression

Stichprobe mit Umfang n:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}\text{: Regressand}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}\text{: Regressor}}$$

Es gelte $x_i \neq x_j$ für mindestens ein $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Achsenabschnitt

Modell:

$$y_i = \alpha + x_i \cdot \beta + \epsilon_i \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

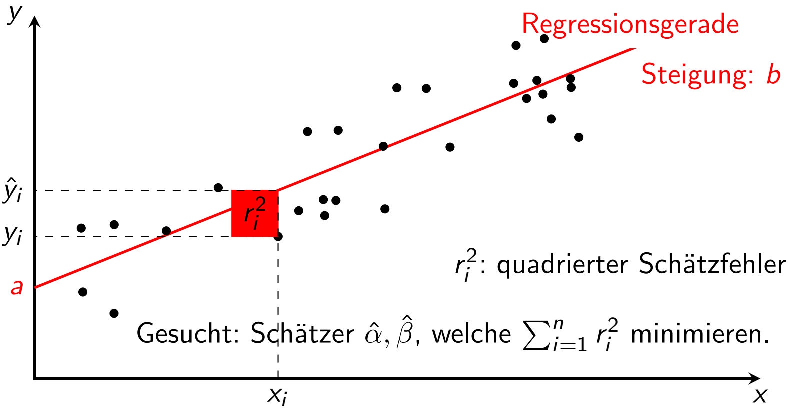
Steigung

Unbekannte Parameter α, β
Unbekannter Störterm ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$

Einfache Lineare Regression – Grafische Darstellung

Vermutete Parameter: a, b $\rightarrow$ Prognose $\hat{y}_i = a + bx_i$

Schätzfehler (hängt von a, b ab): $r_i = y_i - \hat{y}_i$



Gesucht: Schätzer $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, welche $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$ minimieren.

Einfache Lineare Regression

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$$

Zielfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\overbrace{(a + b x_i)}^{\hat{y}_i}$$

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{y_i - a - b \cdot x_i}_{r_i})^2$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_1'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b\cdot x_i) \overset{!}{=} 0 \\ f_2'(a,b) &= -\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a - b\cdot x_i)\cdot x_i \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$1 \cdot \overline{xx} > \bar{x} \cdot \bar{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^n x_i \\ 2\sum_{i=1}^n x_i & 2\sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}$$

>0 $\quad >0$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \cdot x_i$$

Einfache Lineare Regression

Sei $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ein stationärer Punkt von f.

Hinreichende Bedingungen für ein Minimum:

- $f''_{11} = 2n > 0$ ✓
- $f''_{22} = 2n\overline{xx} > 0$ ✓
- $f''_{11} f''_{22} = (2n)^2 \cdot \overline{xx} > (2n)^2 \cdot \bar{x}^2 = f''_{12} f''_{21} \Leftrightarrow \overline{xx} - \bar{x}\bar{x} > 0$ ✓

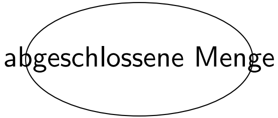
$\Rightarrow$ f ist streng konvex in a, b

$\Rightarrow$ der innere stationäre Punkt $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ ist eine Minimumstelle.

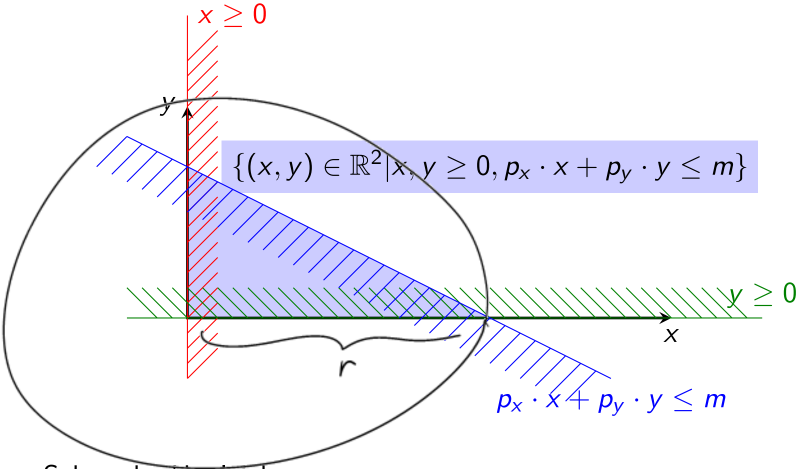
17.5 Extremwertsatz: offene und abgeschlossene Menge

Eine Menge D ist **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.

Eine Menge D ist **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.



Beispiel: Budgetmenge



Schwache Ungleichungen:

$\Rightarrow$ Alle Randpunkte sind in der Budgetmenge enthalten.

$\Rightarrow$ Die Budgetmenge ist abgeschlossen.

17.5 Extremwertsatz: beschränkte Menge

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **beschränkt**, falls es einen Kreis mit endlichem Radius $r < \infty$ gibt, der D vollständig enthält.

Beispiel Budgetmenge:

Wähle $r = \max\left\{\frac{m}{p_x}, \frac{m}{p_y}\right\}$. Der Mittelpunkt des Kreises sei $(0, 0)$.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge heißt **kompakt**.

17.5 Der Extremwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

kompakt

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert eine Stelle $(a, b) \in D$, an der f ein Minimum hat und es existiert eine Stelle $(c, d) \in D$, an der f ein Maximum hat:

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \; \forall \; (x, y) \in D$$

Bemerkung:

Die Bedingungen abgeschlossen und beschränkt an D sind hinreichend für die Existenz von Extremstellen, aber nicht notwendig.

So hat zum Beispiel für $D = \mathbb{R}^2_{\geq}$ die Funktion $f(x, y) = -x - y$ ein Maximum an der Stelle $(0, 0)$, $\mathbb{R}^2_{\geq}$ ist aber nicht beschränkt.

Das Auffinden der Maxima und Minima

Um die Maximum- und Minimumwerte einer differenzierbaren Funktion f, die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist, zu finden, gehe wie folgt vor:

(i) Bestimme alle stationären Stellen von f im Innern von D.

(ii) Bestimme den größten und kleinsten Wert von f auf allen Teilstücken des Randes von D und die zugehörigen Stellen.

(iii) Berechne die Werte der Funktion an allen Stellen, die in (i) und (ii) gefunden wurden. Der größte Funktionswert ist der Maximalwert von f in D. Der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in D.

Ein nützliches Resultat

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und Wertebereich $R = f(D)$.

Sei $g : R \to \mathbb{R}$ und sei (x^*, y^*) in D.

Definiere $h : D \to \mathbb{R}$ durch $g(x, y) = g(f(x, y))$.

(a) Wenn g monoton wachsend ist und (x^*, y^*) die Funktion f maximiert, dann maximiert dieselbe Stelle (x^*, y^*) auch h.

(b) Wenn g strikt monoton wachsend ist, dann maximiert (x^*, y^*) die Funktion f genau dann, wenn (x^*, y^*) die Funktion h maximiert.

Beispiel $\quad f(x,y) = \underbrace{12 \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot \underbrace{y^{\frac{1}{2}}}_{>0}}$ auf D

$$\frac{1}{12} f(x,y) = x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{12} f(x,y)\right)^4 = \left(x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^4 = x^{\frac{1}{4}\cdot 4} \cdot y^{\frac{1}{2}\cdot 4}$$

$$= x \cdot y^2$$

streng monotone Transformation

$$g(u) = \left(\frac{1}{12} \cdot u\right)^4$$

$$g'(u) = 4 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{12} \cdot u\right)^3}_{>0 \text{ für } u>0} > 0$$

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Für $(x, r) \in D$ bezeichne x eine Variable und r einen Parameter.

Für das Optimierungsproblem

$$\max_x \; f(x, r)$$

bezeichne $x^*(r)$ den Wert x, welcher f bei gegebenem Parameter r maximiert.

Definiere die **Optimalwertfunktion**

$$f^*(r) := f(x^*(r), r)$$

Beispiel: Gewinnmaximierung

Outputmenge $x \geq 0$, Preis r, Kosten $C(x) = x^2$.

$$\Rightarrow \pi(x, r) = rx - x^2$$

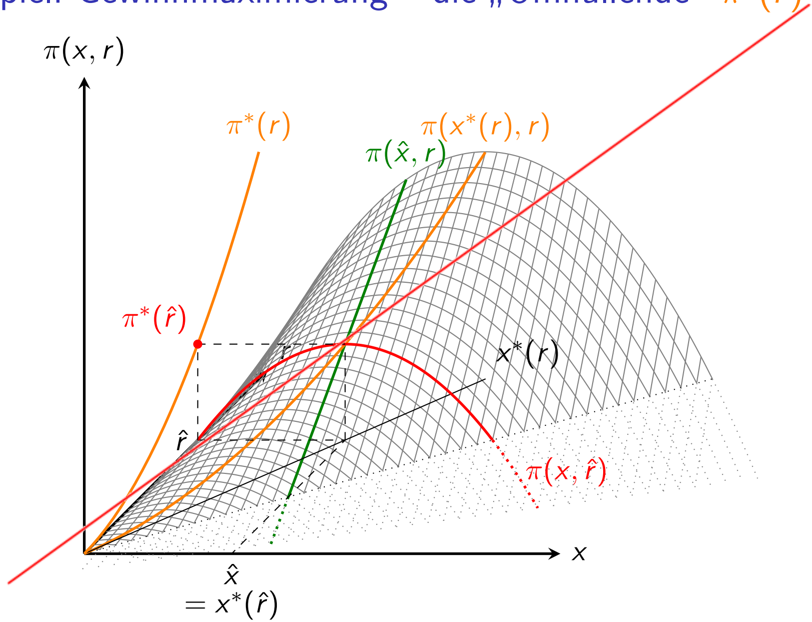
Bedingung erster Ordnung für x:

$$\pi_1'(x, r) = r - 2x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x^*(r) = \frac{r}{2}$$

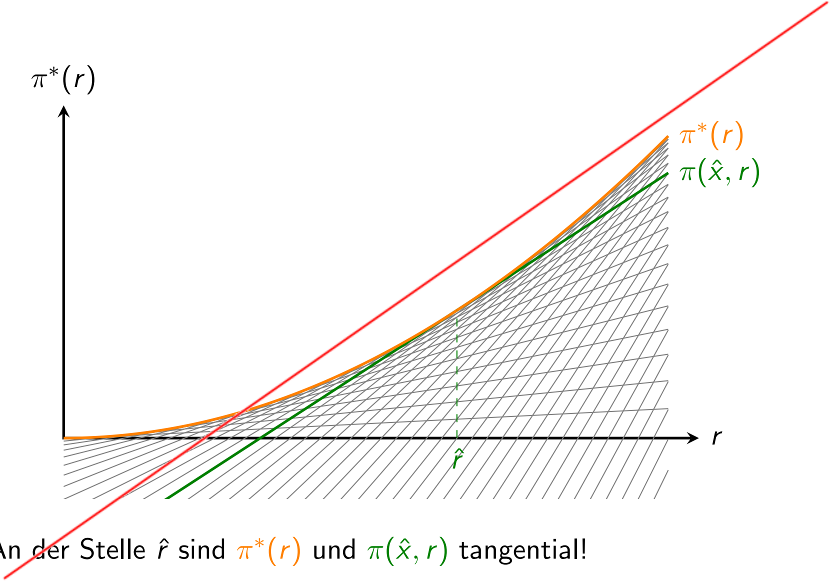
Optimalwertfunktion:

$$\pi^*(r) = \pi(x^*(r), r) = r\frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$$

Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



An der Stelle $\hat{r}$ sind $\pi^*(r)$ und $\pi(\hat{x}, r)$ tangential!

Envelope-Theorem

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

Es bezeichne x eine Variable und r einen Parameter.

Sei $x^*(r)$ der Wert von x, der $f(x, r)$ für r maximiert und sei $(x^*(r), r)$ ein innerer Punkt von D. Für $f^*(r) := f(x^*(r), r)$ gilt dann:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Beweis:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} \frac{dx^*(r)}{dr} + \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Da $x^*(r)$ der Wert von x ist, welcher $f(x, r)$ maximiert, gilt $\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} = 0$.

Anwendung Envelope-Theorem auf Beispiel

$$\pi(x, r) = rx - x^2$$

Optimale Menge $x^*(r)$ bei gegebenem Preis r:

$$x^*(r) = \frac{r}{2}$$

Optimalwertfunktion

$$\pi^*(r) = \frac{r^2}{4}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \pi(x, r)}{\partial r} = x$$

und

$$\frac{d\pi^*(r)}{dr} = \frac{r}{2}$$

Zusammenfassung

- Notwendige Bedingung: stationäre Stelle
- Hinreichende Bedingung für stationäre Stellen:
  Funktion konkav $\Rightarrow$ Maximum
  Funktion konvex $\Rightarrow$ Minimum
- Lokale Extremstellen, Sattelstellen
- Beispiel: Gewinnmaximierung, lineare Regression
- Extremwertsatz
  offene/abgeschlossene und beschränkte Mengen
- ~~Envelope-Theorem~~
  ~~Variablen, Parameter & Optimalwertfunktion~~