

Partielle Ableitungen im Einsatz



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

15.1 Eine einfache Kettenregel

15.2 Kettenregel für zwei Variablen

15.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie

15.6 Homogene Funktionen von zwei Variablen

15.8 Lineare Approximation

15.9 Differentiale

15.10 Gleichungssysteme

15.11 Differenzieren von Gleichungssystemen

Kettenregel für Funktionen mit
einer Variablen

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad g: E \rightarrow D$$

f, g differenzierbar

$f(g(t))$ Verkettete Funktion

$$\frac{d f(g(t))}{dt} = f'(g) \cdot g'(t)$$

15.1 Eine einfache Kettenregel

Verkettete Funktion $f(g(t), h(t))$

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t)$ und $y = h(t)$ ist, dann gilt

$$\frac{dz}{dt} = f'_1(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_2(x, y) \frac{dy}{dt}$$

Diese Ableitung heißt die **totale Ableitung** von z bezüglich t .

Differential

$$dz = f'_1 \cdot dx + f'_2 \cdot dy$$

Beispiel

Alfreds Nutzen aus dem Konsum von Pasta ($x > 0$) und Parmesan ($y > 0$) sei gegeben durch:

$$u(x, y) = 2 \ln(x) + \ln(y)$$

$$U_1'(x, y) = 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$U_2'(x, y) = \frac{1}{y}$$

Die Menge von Pasta x und Parmesan y hängt von Alfreds Einkommen $m > 0$ ab:

$$x(m) = \frac{2}{3} \cdot m \quad x'(m) = \frac{2}{3} \quad y(m) = \frac{1}{3} \cdot m \quad y'(m) = \frac{1}{3}$$

Bestimme $\frac{du}{dm}$!

$$\begin{aligned} \frac{du}{dm} &= U_1'(x, y) \cdot \frac{dx}{dm} + U_2'(x, y) \cdot \frac{dy}{dm} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot m} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot m} = \frac{2}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m} \end{aligned}$$

Alternative Lösung (ohne Kettenregel)

$$V(x, y) = 2 \ln(x) + \ln(y)$$

$$x(m) = \frac{2}{3} \cdot m, \quad y(m) = \frac{1}{3} m$$

$$\begin{aligned} \leadsto V(m) &= 2 \ln\left(\frac{2}{3} m\right) + \ln\left(\frac{1}{3} m\right) \\ &= 2 \left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln(m) \right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln(m) \\ &= 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \underbrace{2 \ln(m)} + \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \underbrace{\ln(m)} \\ &= 2 \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 3 \ln(m) \end{aligned}$$

$$V'(m) = 3 \cdot \frac{1}{m} \quad \checkmark$$

15.2 Kettenregel für zwei Variablen

Verkettete Funktion $f(g(t,s), h(t,s))$

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t, s)$ und $y = h(t, s)$, dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f'_1(x, y) \frac{\partial x}{\partial t} + f'_2(x, y) \frac{\partial y}{\partial t}$$

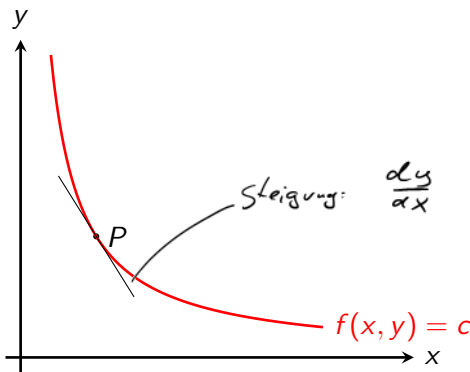
und

$$\frac{\partial z}{\partial s} = f'_1(x, y) \frac{\partial x}{\partial s} + f'_2(x, y) \frac{\partial y}{\partial s}$$

15.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie

Wenn f differenzierbar, $f(x, y) = c$ und $f'_2(x, y) \neq 0$, dann gilt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}$$



Begründung 1: Differenzial

$$dz = f'_1(x,y) \cdot dx + f'_2(x,y) \cdot dy$$

Falls dx, dy entlang einer Höhenlinie

$$\Rightarrow dz = 0$$

$$0 = f'_1 \cdot dx + f'_2 \cdot dy \quad | : dx$$

$$\Leftrightarrow 0 = f'_1 + f'_2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Leftrightarrow -f'_1 = f'_2 \cdot \frac{dy}{dx} \quad | : f'_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{f'_1(x,y)}{f'_2(x,y)}$$

(falls $f'_2 \neq 0$)

$$\text{Für } f(x, y) = A x^c y^d$$

$$f'_1(x, y) = f(x, y) \cdot \frac{c}{x}, \quad f'_2(x, y) = f(x, y) \cdot \frac{d}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}$$

$$\text{hier:} \quad = - \frac{\cancel{f(x, y)} \cdot \frac{c}{x}}{\cancel{f(x, y)} \cdot \frac{d}{y}} = - \frac{c}{x} \cdot \frac{y}{d} = - \frac{c}{d} \frac{y}{x}$$

$$\text{Für } f(x, y) = ax + by, \quad f'_1 = a, \quad f'_2 = b$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{a}{b}$$

15.6 Homogene Funktionen von zwei Variablen

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y heißt **homogen vom Grad** k , wenn

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

für alle $t > 0$ und für alle x, y .

Die Multiplikation beider Variablen mit einem positiven Faktor t wird den Wert der Funktion mit dem Faktor t^k multiplizieren.

Für $f(x, y) = A \cdot x^c \cdot y^d$

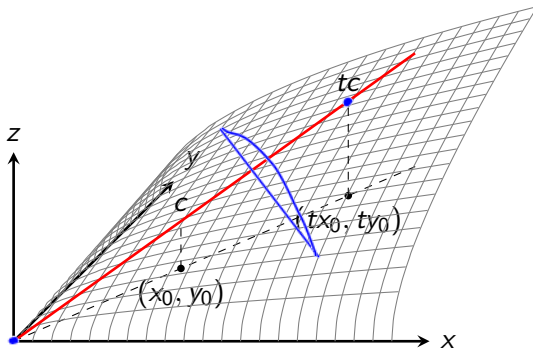
$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= A \cdot (tx)^c \cdot (ty)^d \\ &= A \cdot t^c \cdot x^c \cdot t^d \cdot y^d \\ &= t^c \cdot t^d \cdot \underbrace{A \cdot x^c \cdot y^d}_{f(x, y)} \\ &= t^{c+d} \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

↪ homogen vom Grad $c+d$

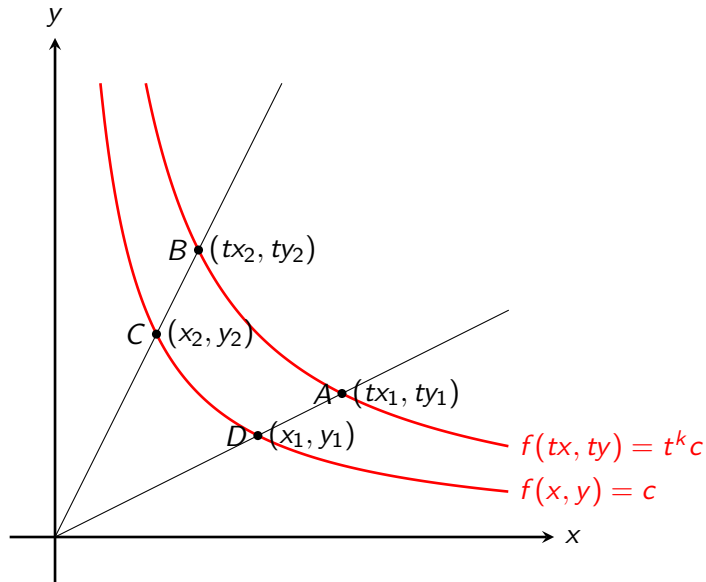
Falls $c+d=1$: konstante Skalenerträge

Geometrische Aspekte homogener Funktionen

Sei $f(x, y)$ homogen vom Grad $k = 1$.



Höhenlinien für eine homogene Funktion



Quasi lineare Nutzenfunktion

$$U(x, y) = \sqrt{x} + y$$

$$U(x, y) = c$$

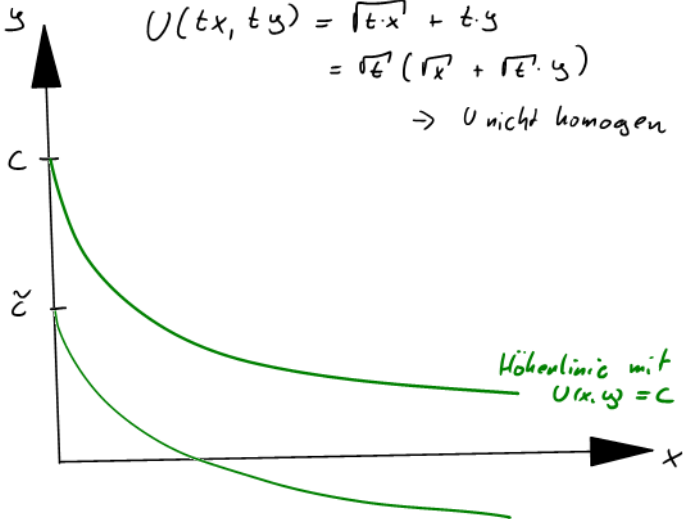
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + y = c$$

$$\Leftrightarrow y = c - \sqrt{x}$$

$$U(tx, ty) = \sqrt{tx} + ty$$

$$= \sqrt{t}(\sqrt{x} + \sqrt{t} \cdot y)$$

$\rightarrow U$ nicht homogen



15.8 Lineare Approximation

Wiederholung: Funktionen einer Variablen

Die lineare Approximation von $f(x)$ um (x_0) ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Die lineare Approximation von $f(x, y)$ um (x_0, y_0) ist

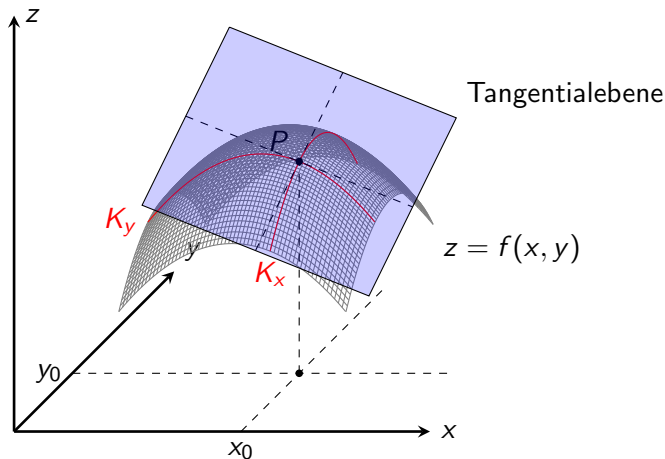
$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_1(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)}_{dx} + f'_2(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}_{dy}$$

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f'_1 \cdot dx + f'_2 \cdot dy = dz$$

Die Tangentialebene

Im Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ hat die Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x, y)$ die Gleichung

$$z - z_0 = f'_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$



15.9 Differentiale und Zuwächse

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Seien $dx, dy \in \mathbb{R}$.

Das **Differential** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y) :

$$dz \text{ oder } df = f'_1(x, y)dx + f'_2(x, y)dy$$

Der **Zuwachs** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y) :

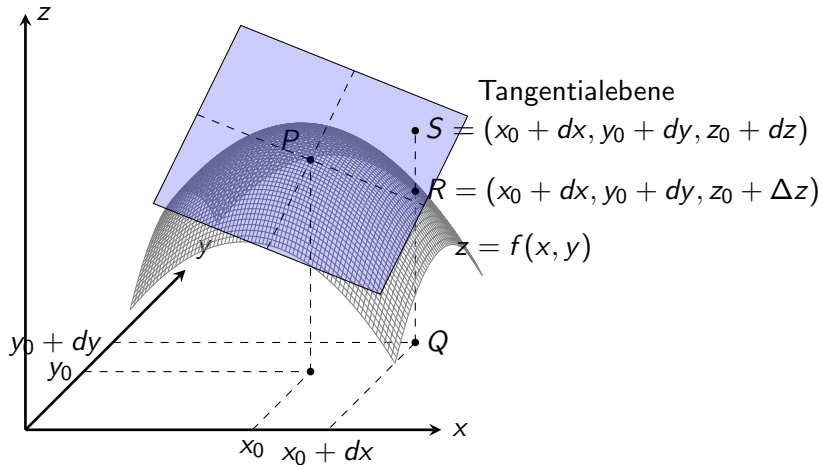
$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

Falls $|dx|$ und $|dy|$ klein:

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f'_1(x, y)dx + f'_2(x, y)dy \Leftrightarrow \Delta z \approx dz$$

Das Differential dz und der Zuwachs Δz

$$S_z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + \underbrace{f'_1(x_0, y_0)dx + f'_2(x_0, y_0)dy}_{dz}$$



15.10 Gleichungssysteme: Freiheitsgrade

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ seien $n \in \mathbb{N}$ Variablen.

Wenn es keine Restriktion an diese Variablen gibt, so gibt es n **Freiheitsgrade**.

Müssen diese Variablen eine Gleichung der Form

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

erfüllen, so gibt es noch $n - 1$ Freiheitsgrade.

Für jede weitere „unabhängige“ Restriktion wird die Anzahl der Freiheitsgrade um 1 reduziert.

n Variablen mit m Restriktionen

n Variablen erfüllen ein System von m „unabhängigen“ Restriktionen, falls

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Falls $m < n$, so verbleiben $n - m$ Freiheitsgrade.

Freiheitsgrade und Unabhängige Restriktionen

Ein System von m Restriktionen ist **unabhängig**, falls keine der m Restriktionen durch die anderen $m - 1$ Restriktionen impliziert wird.

Ein System von Gleichungen mit n Variablen hat k **Freiheitsgrade**, wenn es eine Menge von k Variablen gibt, die frei gewählt werden können, während die restlichen $n - k$ Variablen eindeutig bestimmt sind, sobald den k freien Variablen spezielle Werte zugeordnet wurden.

Beispiel

i) $Y = C + I$ Parameter

ii) $C = a + bY$

Drei Variablen: Y, C, I

Zwei Gleichungen $\rightarrow$ 1 Freiheitsgrad

Zum Beispiel: Y, C endogen
 $\rightarrow$ vom Modell erklärt

I exogen
 $\rightarrow$ außerhalb des Modells
festgelegt

Die Lösung des Modells

(Y, C) ist dann eine Funktion von I

Gesucht:

$$\frac{dy}{dI}, \quad \frac{dC}{dI}$$

Leite $Y(I) = C(I) + I$ nach I ab.

$$\frac{dy}{dI} = \frac{dC}{dI} + 1$$

und $Y(I) = a + b \cdot C(I)$ auch:

$$\frac{dy}{dI} = b \cdot \frac{dC}{dI}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dC}{dI} + 1 \right) = b \cdot \frac{dC}{dI} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (b-1) \frac{dC}{dI} \quad , \text{ falls } b < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{dC}{dI} = \frac{1}{b-1} = -\frac{1}{1-b}$$

$$\frac{dy}{dI} = -\frac{b}{1-b}$$

15.11 Differenzieren von Gleichungssystemen

$$5u + 5v = 2x - 3y$$

$$2u + 4v = 3x - 2y$$

Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und vier Variablen
→ zwei Freiheitsgrade

Wir können zwei Variablen frei wählen, die restlichen zwei Variablen sind dann eindeutig bestimmt.

Zum Beispiel können wir x und y frei wählen;
 u und v sind dann Funktionen von x und y .

Durch das Differenzieren des Gleichungssystems nach x und y können wir die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y berechnen, ohne das Gleichungssystem zu lösen.

Endogene und exogene Variablen

Im vorangegangenen Beispiel sind x und y **exogene** Variablen, d.h. Parameter die in das ökonomische Modell einfließen und

es sind u und v **endogene** Variablen, d.h. Größen, die vom ökonomischen Modell erklärt werden.

Das ökonomische Modell hat die Form von **strukturellen Gleichungen**:

$$f(u, v, x, y) = 0$$

$$g(u, v, x, y) = 0$$

Sei (u_0, v_0) eine Lösung der beiden Gleichungen bei gegebenen Parametern (x_0, y_0) .

Implizite Definition und reduzierte Form

Das strukturelle Modell

$$f(u, v, x, y) = 0$$

$$g(u, v, x, y) = 0$$

definiert die Variablen u und v **implizit** als Funktionen der Parameter x und y :

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

Diese Gleichungen heißen **reduzierte Form** des Modells.

Zusammenfassung

- ▶ Totale Ableitung
- ▶ Implizites Differenzieren
- ▶ Homogenität, konstante Skalenerträge
- ▶ Lineare Approximation
- ▶ Differentiale und Zuwächse
- ▶ Komparative Statik mit Gleichungssystemen