Vorlesung zu Kapitel 14:[1]

Funktionen mehrerer Variablen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

14.1 Funktionen von zwei Variablen

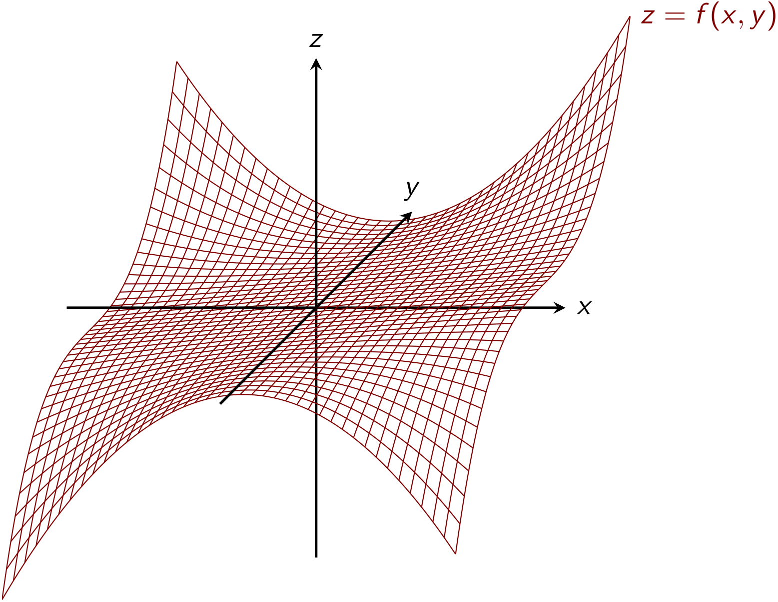
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y mit Definitionsbereich D ist eine Regel, die eine genau spezifizierte Zahl

$$f(x, y) \in \mathbb{R} \text{ zu jedem Punkt } (x, y) \in D$$

festlegt.

Beispiel: $f(x,y) = 2x + x^2y^3$



$f(x, y) = 2x + x^2y^3$

Gebe die Werte von f für folgende Zahlenpaare an:

a) $(x, y) = (1, 0)$

b) $(x, y) = (0, 1)$

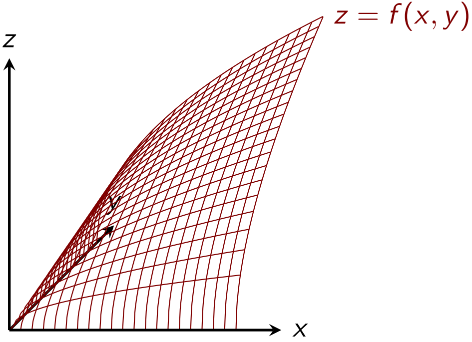
c) $(x, y) = (-2, 3)$

d) $(x, y) = (a + 1, b)$

Beispiel: Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

mit $A, c, d > 0$.



14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

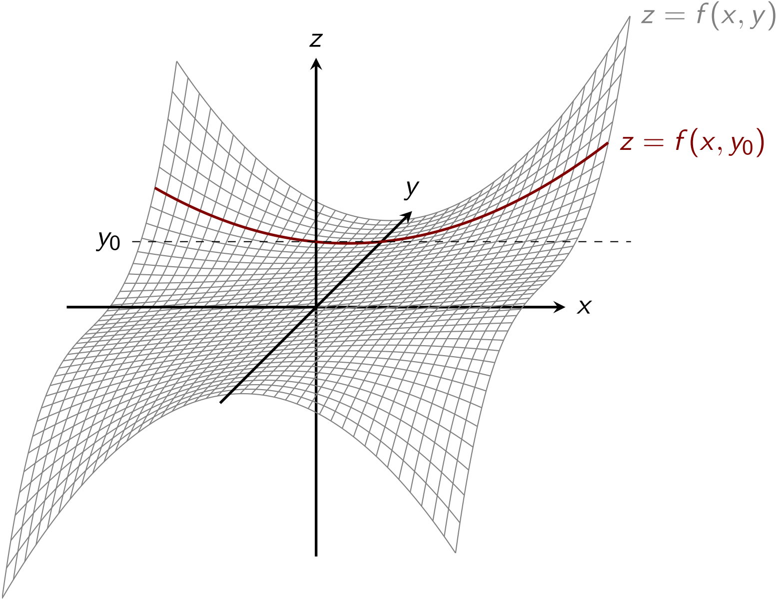
Falls $z = f(x, y)$, dann ist

- $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x, wenn y konstant gehalten wird.
- $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y, wenn x konstant gehalten wird.

Definition:

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1'(x, y) := \lim\limits_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,y)-f(x,y)}{dx}$
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2'(x, y) := \lim\limits_{dy \to 0} \frac{f(x,y+dy)-f(x,y)}{\Delta y}$

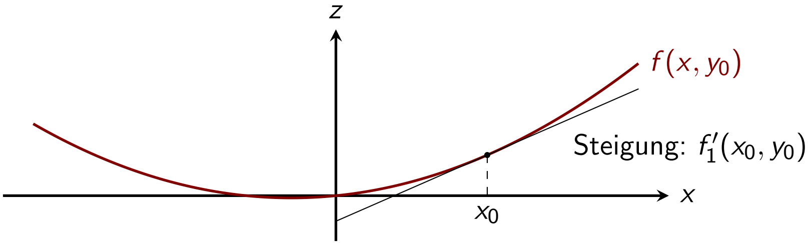
Beispiel $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



Partielle Ableitung nach x

$$f(x, y_0) = 2x + x^2 y_0^3$$

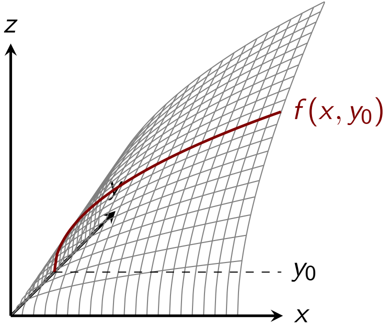
Betrachte die Variable y als konstanten Parameter: $y = y_0$



$$f_1'(x, y_0) = 2 + 2xy_0^3$$

Cobb-Douglas-Funktion $f(x, y) = Ax^c y^d$

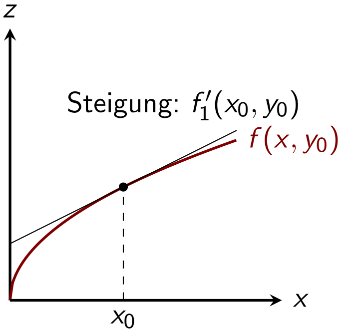
mit $A, c, d > 0$.



Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

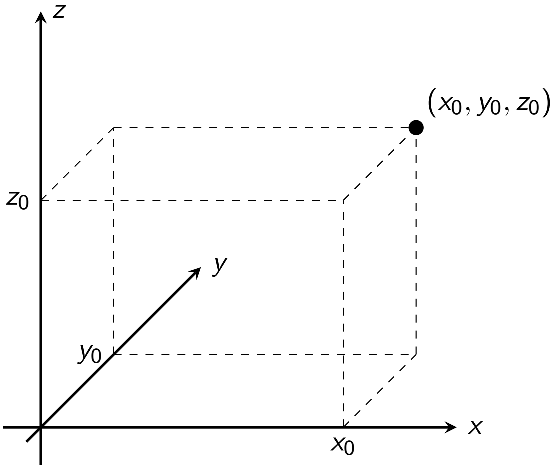
mit $A, c, d > 0$.



$$f_1'(x, y) =$$

14.3 Geometrische Darstellung

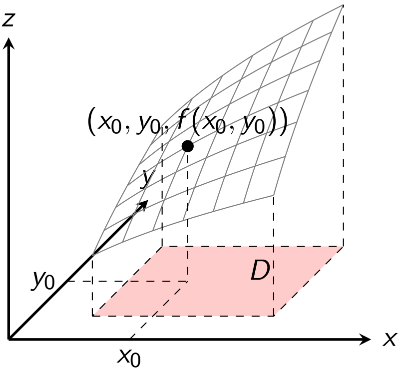
Koordinatensystem mit drei Dimensionen



$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$: „nichtnegativer Oktant“

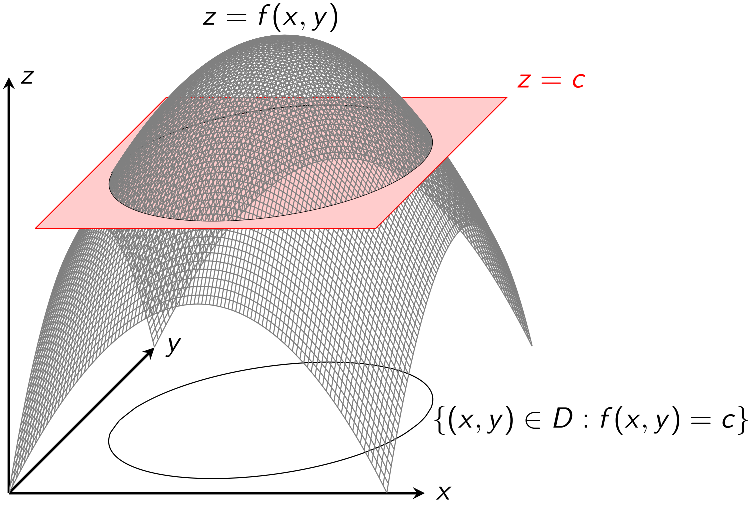
Der Graph einer Funktion von zwei Variablen

Der **Graph der Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$:

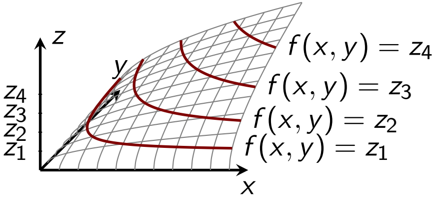


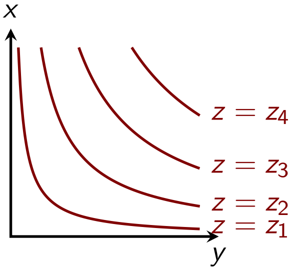
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

Höhenlinien



Isoquanten der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

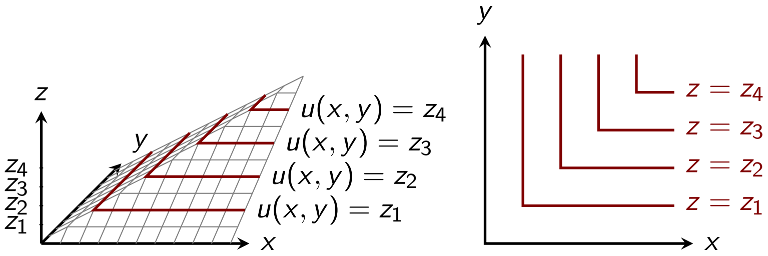




Eine **Isoquante** („gleich Menge") gibt an, mit welchen Inputkominationen (x, y) die Menge z produziert werden kann.

Isoquanten sind Projektionen der Höhenlinien von Produktionsfunktionen auf die Ebene der Inputmengen.

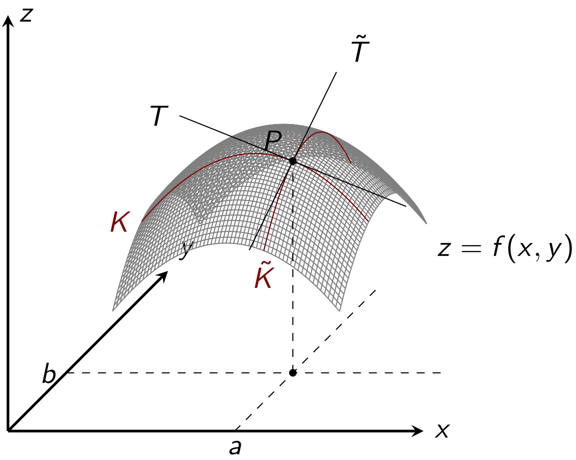
Indifferenzkurven für perfekte Komplemente



Eine **Indifferenzkurve** gibt an, welche Güterbündel (x, y) den gleichen Nutzen generieren.

Indifferenzkurven sind Projektionen der Höhenlinien von Nutzenfunktionen auf die Ebene der Güterbündel.

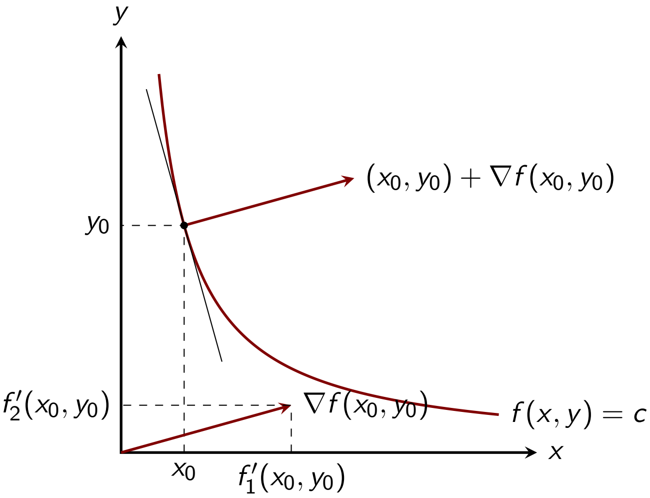
Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen



Steigung von T: $f_1'(a, b)$ Steigung von $\tilde{T}$: $f_2'(a, b)$

Der Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x, y) = (f_1'(x, y), f_2'(x, y))$$



Der Gradient einer Cobb-Douglas Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

1. partielle Ableitungen:

$$f_1'(x, y) =$$

$$f_2'(x, y) =$$

Gradient

$$\nabla f(x, y) =$$

Zweite partielle Ableitungen in zwei Variablen

Für jede der beiden Variablen x und y von f gibt es zwei partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{21} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = f''_{22}$$

Insgesamt gibt es also vier zweite partielle Ableitungen.

Zweite Ableitungen von $f(x,y) = 2x + x^2y^3$

1. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2 + 2xy^3 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3x^2y^2 \end{aligned}$$

2. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} &= \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} &= \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} &= \end{aligned}$$

Zweite Ableitungen von $f(x, y) = Ax^c y^d$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f(x,y)cx^{-1}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x,y)dy^{-1}$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} =$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} =$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} =$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} =$$

Hesse-Matrix an der Stelle (x, y)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) \in D$.

Die Ableitungen f''_{12} und f''_{21} nennen wir auch „Kreuzableitungen“

Wenn alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$f''_{12}(x, y) = f''_{21}(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in D \ .$$

Hessematrix der Cobb-Douglas Funktion

$$f''(x, y) =$$

14.4 Flächen: Eine Ebene im Raum

$$ax + by + cz = d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit nicht $a = b = c = 0$ fest und $x, y, z \in \mathbb{R}$ variabel.

Alle Punkte (x, y, z), welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer **Ebene**.

Falls nicht $a = b = 0$, dann definiert $ax + by + c \cdot 0 = d$ die Schnittgerade der Ebene mit der xy-Ebene.

Ökonomische Anwendung: Budget-Ebene

Seien $x, y, z \geq 0$ Mengen dreier Güter und

seien $p_x, p_y, p_z > 0$ deren Preise.

Sei zusätzlich $m \geq 0$ das verfügbare Einkommen.

Alle Punkte (x, y, z) welche die Gleichung

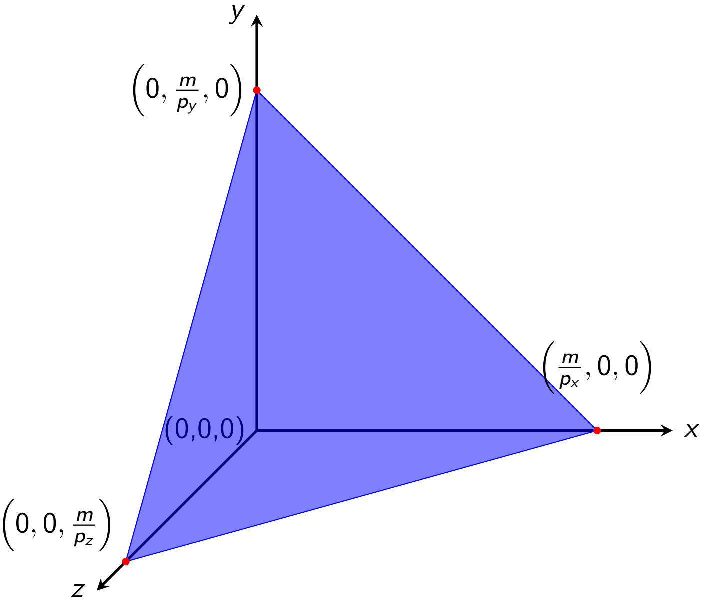
$$p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z = m$$

erfüllen, kosten genau m Geldeinheiten. Sie liegen in der **Budget-Ebene**.

Alle Güterbündel, die man sich leisten kann, bilden die **Budget-Menge**:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_{\geq} : p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z \leq m\right\}$$

Grafische Darstellung der Budget-Ebene



Abstand zwischen zwei Punkten

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten (x, y, z) und (a, b, c) ist

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Eine **Kugel** mit Mittelpunkt (a, b, c) und Radius r ist definiert durch

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

14.5 Funktionen von n Variablen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n, b, A \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Lineare Funktion in n Variablen (für $b \neq 0$ „affin"):

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$$

Cobb-Douglas Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = Ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$$

mit $x_1, \ldots, x_n \geq 0$

Leontief Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \min\{a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n\}$$

Mittelwerte

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(a) arithmetisches Mittel: $\bar{x}_A := \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$

(b) geometrisches Mittel: $\bar{x}_G := \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$
(für $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$)

(c) harmonisches Mittel: $\bar{x}_H := \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}$
(für $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$)

Falls $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, dann gilt allgemein:

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A$$

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Sei f eine Funktion, definiert auf einer konvexen Menge D.

f ist **konkav**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \geq \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda) f(\mathbf{b})$$

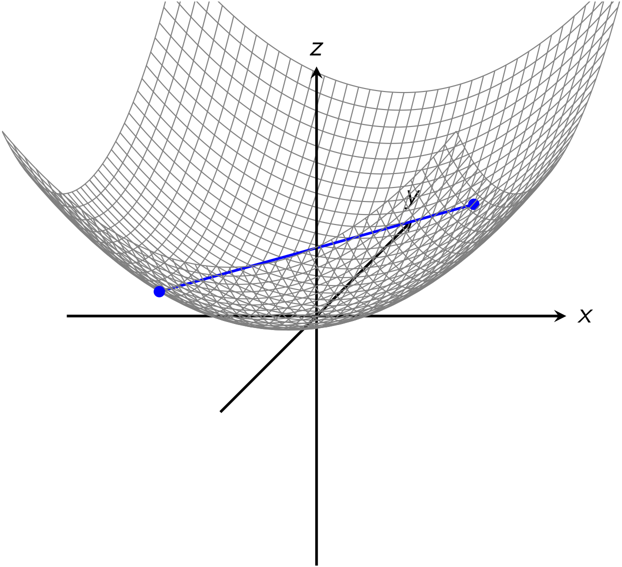
f ist **konvex**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda) f(\mathbf{b})$$

Falls $D \subset \mathbb{R}$: Definition identisch zu Kapitel 8.

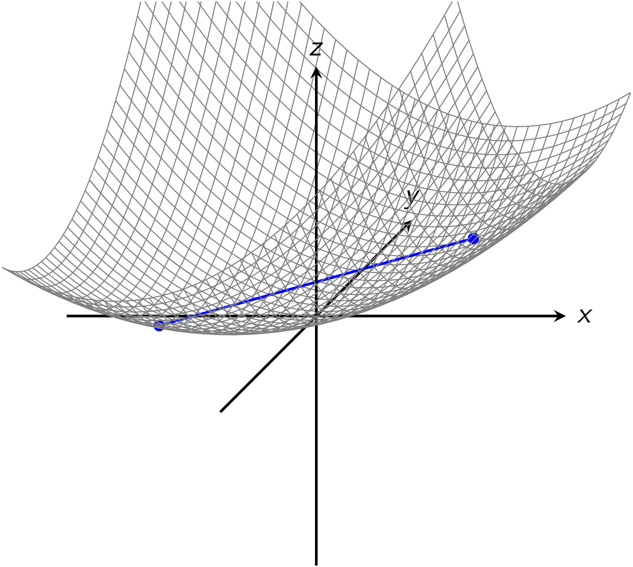
Falls $D \subset \mathbb{R}^n$: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sind Vektoren. Die Idee der Definition bleibt aber erhalten.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$



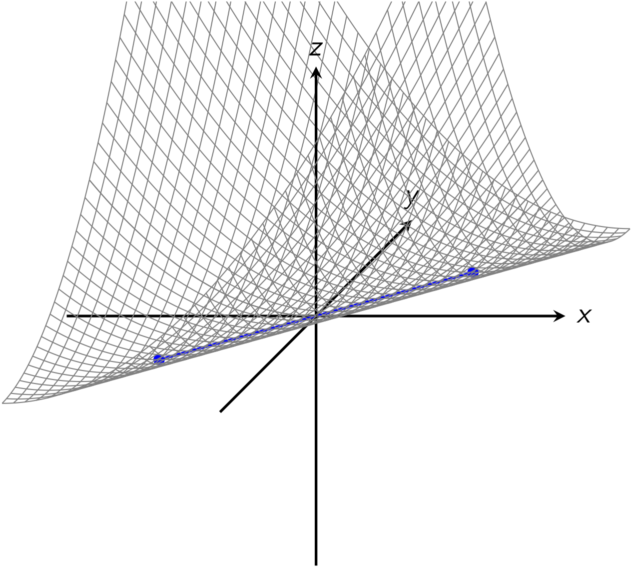
$z = f(x, y)$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$



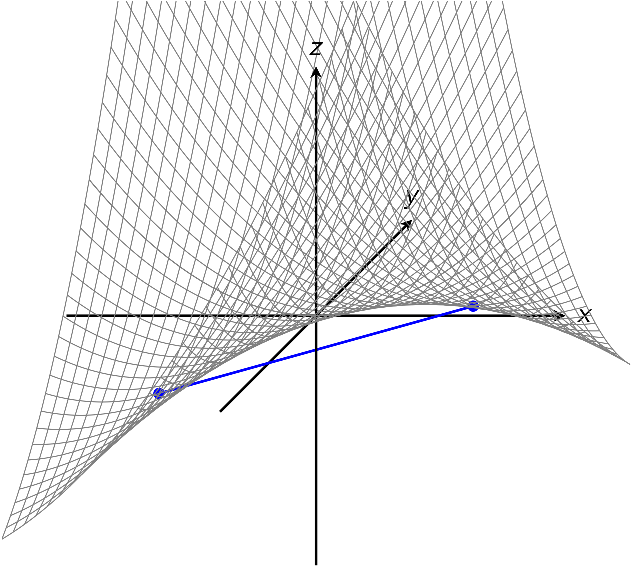
$z = f(x, y)$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$



$z = f(x, y)$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$



$z = f(x, y)$

Konvexität/Konkavität und 2. partielle Ableitungen

In allen drei Beispielen

- $x^2 + y^2$
- $x^2 + y^2 + xy$
- $x^2 + y^2 + 2xy$
- $x^2 + y^2 + 3xy$

gilt $f''_{11} = f''_{22} = 2 > 0$.

Es stellen jedoch nur die ersten zwei Beispiele streng konvexe Funktionen dar.

Bei multivariaten Funktionen kommt es nicht nur auf die Vorzeichen von f''_{ii} an, sondern auf alle zweiten partiellen Ableitungen.

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex } \Leftrightarrow f''_{11} \geq 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} \geq f''_{12}f''_{21}$$

$$f \text{ streng konvex } \Leftarrow f''_{11} > 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} > f''_{12}f''_{21}$$

$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow f''_{11} \leq 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} \geq f''_{12}f''_{21}$$

$$f \text{ streng konkav } \Leftarrow f''_{11} < 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} > f''_{12}f''_{21}$$

Beachte, dass jede zweite partielle Ableitung von dem jeweiligen Punkt (x, y) abhängen kann. Die Ungleichungen müssen für jeweils alle Punkte $(x, y) \in D$ gelten.

Falls in einem Punkt (x, y) gilt, dass $f''_{11}f''_{22} < f''_{12}f''_{21}$, dann ist die Funktion weder konvex noch konkav.

Beispiel $f(x,y) = x^2 + y^2 + t \cdot xy$

$$\begin{aligned} f_1'(x,y) &= 2x + ty \\ f_2'(x,y) &= 2y + tx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11}''(x,y) &= 2 & \qquad f_{12}''(x,y) &= t \\ f_{21}''(x,y) &= t & \qquad f_{22}''(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

Es gilt $f_{11}'' > 0\checkmark$

Zweite Ungleichung $f_{11}'' f_{22}'' \geq f_{12}'' f_{21}''$:

$$2 \cdot 2 \geq t \cdot t \Leftrightarrow t \leq |2|$$

Die Funktion f ist also schwach konvex genau dann wenn $t \leq |2|$.
Falls $|t| < 2$, so ist f streng konvex.
Falls $|t| > 2$, dann ist f weder konvex noch konkav.

14.9 Ökonomische Anwendung: Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Die Hesse-Matrix der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$f(x,y) = Ax^c y^d \text{ mit } c,d > 0$$

haben wir für $x, y > 0$ bereits berechnet:

$$f''(x,y) = f(x,y)\begin{pmatrix} -\frac{c}{x}\frac{1-c}{x} & \frac{c}{x}\frac{d}{y} \\ \frac{c}{x}\frac{d}{y} & -\frac{d}{y}\frac{1-d}{y} \end{pmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen ist die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (streng) konkav?

14.9 Ökonomische Anwendung: Leontief Produktionsfunktion

Die Leontief Produktionsfunktion ist definiert durch:

$$f(x, y) = \min\{cx, dy\} \text{ mit } c, d > 0$$

Problem: Entlang der Gerade $cx = dy$ hat die Funktion eine Falte; sie ist dort nicht differenzierbar.

$$f(x, y_0) = \begin{cases} cx & \text{falls } cx \leq dy_0 \\ dy_0 & \text{falls } cx > dy_0 \end{cases}$$

Ist diese Produktionsfunktion (streng) konkav?

Zusammenfassung

- Funktionen mit zwei und mehr Variablen
- Geometrische Darstellung:
  Höhenlinien als Isoquanten & Indifferenzkurven
- Ebenen und Abstand
- Partielle erste und zweite Ableitungen:
  Gradient und Hesse-Matrix
- Konvexe Mengen
- Konkave und konvexe Funktionen