Vorlesung zu Kapitel 14:[1]

Funktionen mehrerer Variablen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

14.1 Funktionen von zwei Variablen

Definitionsbereich
ist eine Teilmenge
x-y-Ebene

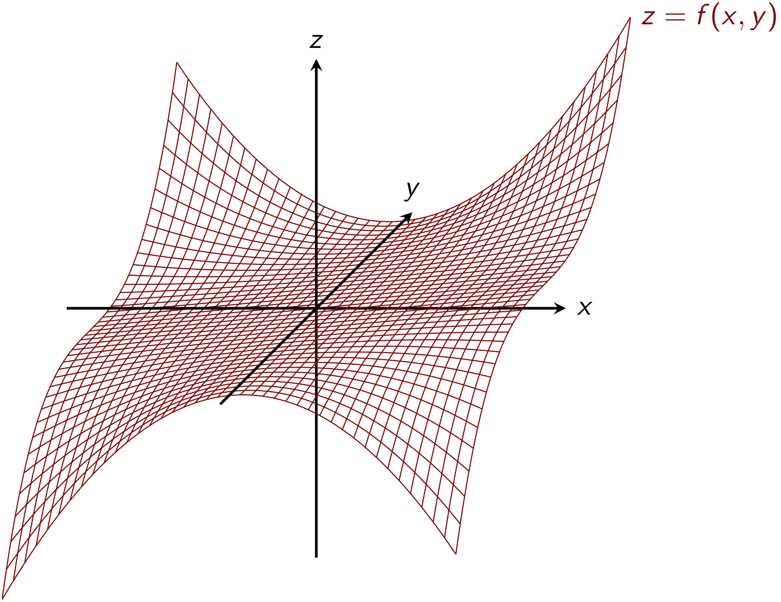
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y mit Definitionsbereich D ist eine Regel, die eine genau spezifizierte Zahl

$$f(x, y) \in \mathbb{R} \text{ zu jedem Punkt } (x, y) \in D$$

festlegt.

Beispiel: $f(x,y) = 2x + x^2y^3$



$f(x,y) = 2x + x^2y^3$

Gebe die Werte von f für folgende Zahlenpaare an:

a) $(x,y) = (1,0)$ $\quad f(1,0) = 2\cdot 1 + 1^2\cdot 0^3 = 2$

b) $(x,y) = (0,1)$ $\quad f(0,1) = 2\cdot 0 + 0^2\cdot 1^3 = 0$

c) $(x,y) = (-2,3)$ $\quad f(-2,3) = 2\cdot(-2) + (-2)^2\cdot 3^3 = -4 + 4\cdot 27 = 26\cdot 4$

$= 25\cdot 4 + 4 = 104$

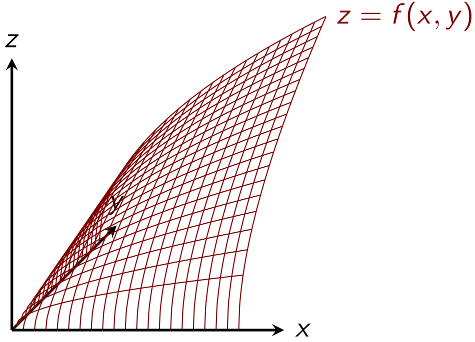
d) $(x,y) = (a+1, b)$

$f(a+1, b) = 2(a+1) + (a+1)^2 b^3$

Beispiel: Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

mit $A, c, d > 0$.



14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Falls $z = f(x, y)$, dann ist

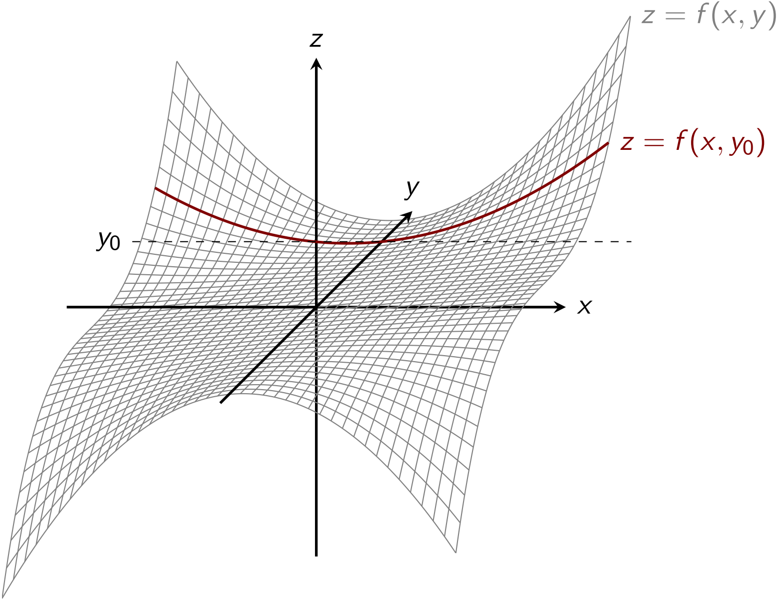
- $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x, wenn y konstant gehalten wird.
- $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y, wenn x konstant gehalten wird.

Definition: $f'_x(x,y)$

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1'(x, y) := \lim\limits_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,y)-f(x,y)}{dx}$
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2'(x, y) := \lim\limits_{dy \to 0} \frac{f(x,y+dy)-f(x,y)}{\Delta y}$

$f'_y(x,y)$

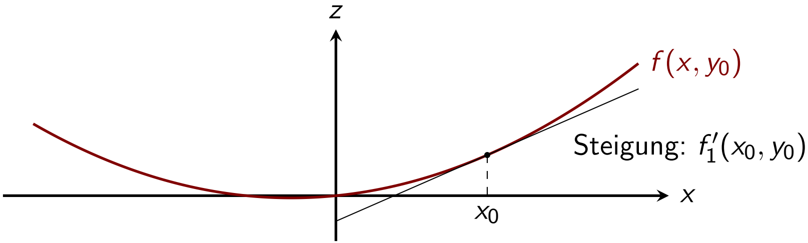
Beispiel $f(x, y) = 2x + x^2 y^3$



Partielle Ableitung nach x

$$f(x, y_0) = 2x + x^2 y_0^3$$

Betrachte die Variable y als konstanten Parameter: $y = y_0$



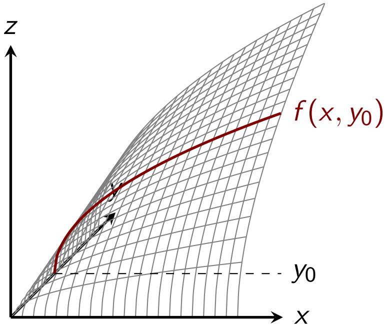
$$f_1'(x, y_0) = 2 + 2xy_0^3$$

$$f(x,y) = 2x + x^2 \cdot y^3$$

$$f_2'(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2 \cdot y^2$$

Cobb-Douglas-Funktion $f(x, y) = Ax^c y^d$

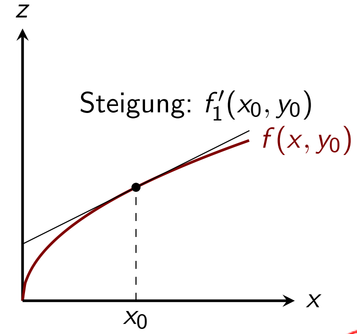
mit $A, c, d > 0$.



Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x,y) = Ax^c y^d$$

mit $A, c, d > 0$.

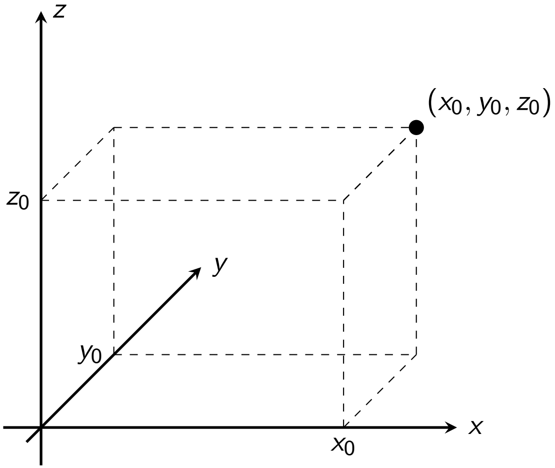


$$f_1'(x,y) = A \cdot c \cdot x^{c-1} \cdot y^d = c \cdot A x^c \cdot x^{-1} \cdot y^d$$
$$= c \cdot x^{-1} \cdot A \cdot x^c \cdot y^d = \frac{c}{x} \cdot f(x,y)$$

$$f_2'(x,y) = \frac{d}{y} \cdot f(x,y)$$

14.3 Geometrische Darstellung

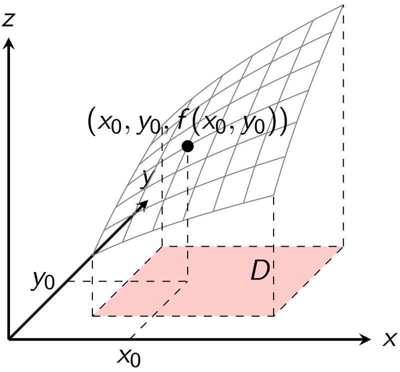
Koordinatensystem mit drei Dimensionen



$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\} : \text{„nichtnegativer Oktant“}$$

Der Graph einer Funktion von zwei Variablen

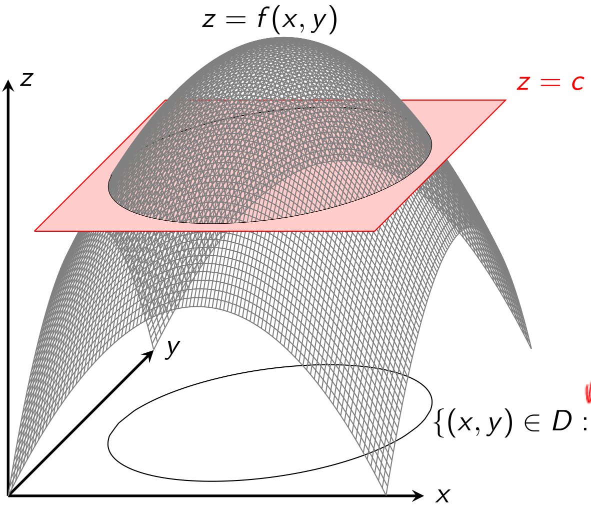
Der **Graph der Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$:



$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

Höhenlinien

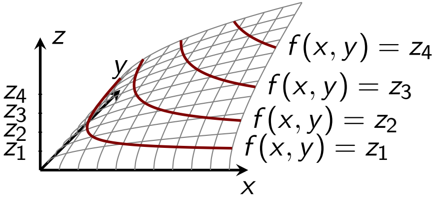
$f(x,y) = -x^2 - y^2 + A$

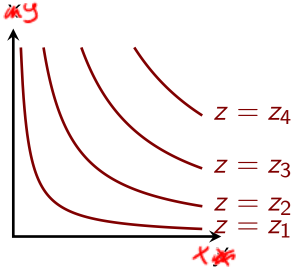


„für die gilt"

$\{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}$

Isoquanten der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

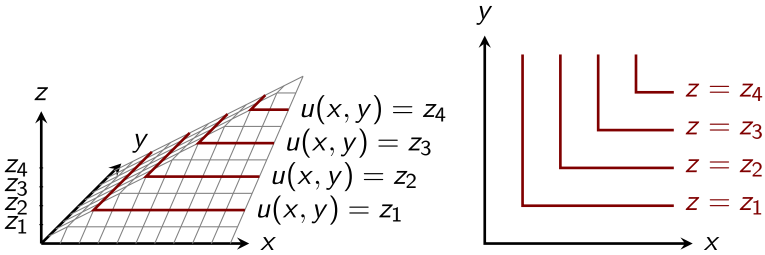




Eine **Isoquante** („gleich Menge“) gibt an, mit welchen Inputkominationen (x, y) die Menge z produziert werden kann.

Isoquanten sind Projektionen der Höhenlinien von Produktionsfunktionen auf die Ebene der Inputmengen.

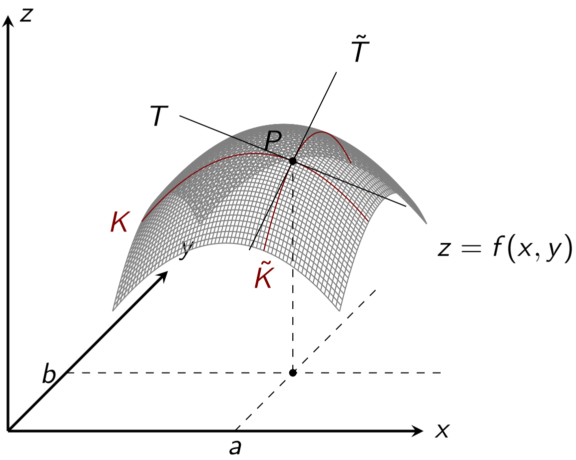
Indifferenzkurven für perfekte Komplemente



Eine **Indifferenzkurve** gibt an, welche Güterbündel (x, y) den gleichen Nutzen generieren.

Indifferenzkurven sind Projektionen der Höhenlinien von Nutzenfunktionen auf die Ebene der Güterbündel.

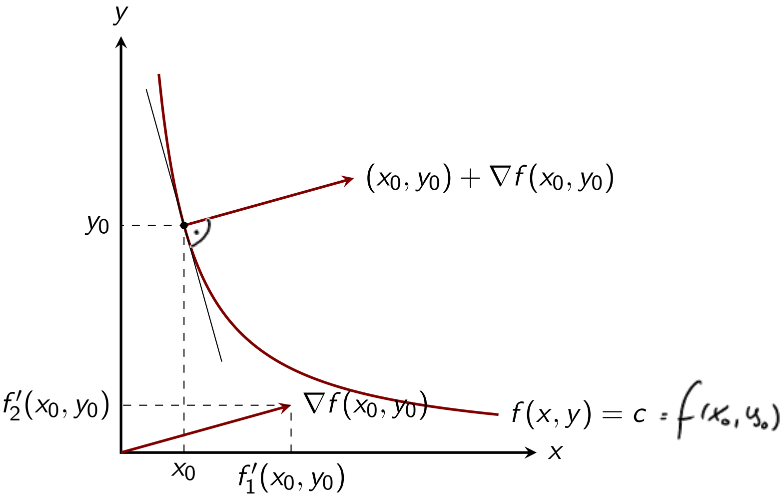
Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen



Steigung von T: $f_1'(a, b)$ Steigung von $\tilde{T}$: $f_2'(a, b)$

Der Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x, y) = (f_1'(x, y), f_2'(x, y))$$



Der Gradient einer Cobb-Douglas Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

1. partielle Ableitungen:

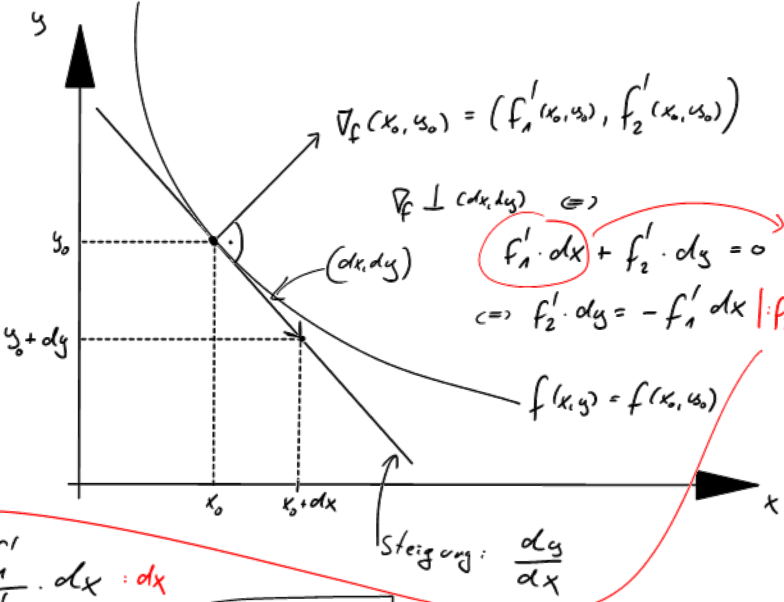
$$f_1'(x, y) = \frac{c}{x} \cdot f(x, y)$$

$$f_2'(x, y) = \frac{d}{y} \cdot f(x, y)$$

Verlängerung falls $f > 1$
Verkürzung falls $f < 1$

Gradient

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{c}{x} \cdot f(x,y), \frac{d}{y} \cdot f(x,y) \right) = \underbrace{\left(\frac{c}{x}, \frac{d}{y} \right)}_{\text{Richtung}} \cdot \underbrace{f(x,y)}_{\substack{\text{Verlängerung falls } f>1 \\ \text{Verkürzung falls } f<1}}$$



$\nabla f \perp (dx, dy) \iff$

$$f_1' \cdot dx + f_2' \cdot dy = 0$$

$$\iff f_2' \cdot dy = -f_1' \, dx \quad | : f_2'$$

$$dy = -\frac{f_1'}{f_2'} \cdot dx \quad : dx$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1'}{f_2'}}$$

Hohenlinie erfüllt $f(x,y) = f(x_0, y_0)$

$$A \cdot \underline{x^c} \cdot \underline{y^d} = A \cdot x_0^c \cdot y_0^d$$

Zahl, da x_0, y_0 fest.

$$A\left(c x^{c-1} \cdot y^d + x^c \cdot d y^{d-1} \cdot y'\right) = 0$$

$$\underbrace{A c x^{c-1} y^d}_{f_1'(x,y)} + \underbrace{A x^c \cdot d y^{d-1}}_{f_2'(x,y)} y' = 0 \quad \Big| - f_1'$$

$$\Leftrightarrow \quad f_2'(x,y) \cdot y' = - f_1'(x,y) \quad \Big| : f_2'$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = - \frac{f_1'(x,y)}{f_2'(x,y)}$$

Zweite partielle Ableitungen in zwei Variablen

Für jede der beiden Variablen x und y von f gibt es zwei partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{21} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = f''_{22}$$

Insgesamt gibt es also vier zweite partielle Ableitungen.

Zweite Ableitungen von $f(x,y) = 2x + x^2y^3$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 + 2xy^3$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = 2 \cdot y^3$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = 6x^2y$$

=

Zweite Ableitungen von $f(x,y) = Ax^c y^d$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \underbrace{f(x,y)}\underbrace{cx^{-1}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x,y) d y^{-1}$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = -f(x,y) \cdot c \cdot x^{-2}(1-c)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)\, c \cdot x^{-1} \cdot d y^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f(x,y) \cdot d y^{-1} c x^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = -f(x,y) \cdot d y^{-2}(1-d)$$

$$f''_{11}(x,y) = \underbrace{f'_1(x,y)}_{f(x,y)\cdot c\cdot x^{-1}} \cdot c \cdot x^{-1} + f(x,y)\cdot(-1)\cdot c\cdot x^{-2}$$

$$x^{-2}$$

$$= f(x,y)\cdot c\cdot x^{-1}\cdot c\cdot x^{-1} - f(x,y)\cdot c\cdot x^{-2}$$

$$= f(x,y)\cdot c\, x^{-2}(c-1)$$

$$= -f(x,y)\cdot c\, x^{-2}(1-c)$$

$$f'_2(x,y) = f(x,y)\cdot d\cdot y^{-1} \quad , \quad f'_1(x,y) = f(x,y)\cdot c\cdot x^{-1}$$

$$f''_{21}(x,y) = f'_1(x,y)\cdot d\cdot y^{-1} = f(x,y)\cdot c\, x^{-1} d\, y^{-1}$$

$$f''_{12}(x,y) = f'_2(x,y)\cdot c\cdot x^{-1} = f(x,y)\cdot d\, y^{-1}\cdot c\, x^{-1}$$

$$f_2'(x,y) = \underbrace{f(x,y)}_{} \cdot \underbrace{\alpha \cdot y^{-1}}_{}$$

$$f_{22}''(x,y) = f(x,y) \cdot \alpha \cdot y^{-1} \cdot \alpha y^{-1} + f(x,y) \cdot (-1)\, \alpha\, y^{-2}$$

$$= f(x,y) \cdot \alpha\, y^{-2} (\alpha - 1)$$

$$= - f(x,y) \cdot \alpha \cdot y^{-2} (1 - \alpha)$$

$$f''(x,y) = f(x,y)\begin{pmatrix} -\frac{c}{x}\,\frac{1-c}{x} & \frac{c}{x}\,\frac{d}{y} \\ \frac{c}{x}\,\frac{d}{y} & -\frac{d}{y}\,\frac{1-d}{y} \end{pmatrix}$$

$$f''_{11} = -f(x,y)\, c\, x^{-2}(1-c)$$

Ü f'' für $c+d=1$

Hesse-Matrix an der Stelle (x, y)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) \in D$.

Die Ableitungen f''_{12} und f''_{21} nennen wir auch „Kreuzableitungen“

Wenn alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$f''_{12}(x, y) = f''_{21}(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in D \ .$$

Hessematrix der Cobb-Douglas Funktion

$$f''(x, y) =$$

14.4 Flächen: Eine Ebene im Raum

$$ax + by + cz = d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit nicht $a = b = c = 0$ fest und $x, y, z \in \mathbb{R}$ variabel.

Alle Punkte (x, y, z), welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer **Ebene**.

Falls nicht $a = b = 0$, dann definiert $ax + by + c \cdot 0 = d$ die Schnittgerade der Ebene mit der xy-Ebene.

Ökonomische Anwendung: Budget-Ebene

Seien $x, y, z \geq 0$ Mengen dreier Güter und

seien $p_x, p_y, p_z > 0$ deren Preise.

Sei zusätzlich $m \geq 0$ das verfügbare Einkommen.

Alle Punkte (x, y, z) welche die Gleichung

$$\overbrace{p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z}^{\text{Wert des Güterbündels }(x,y,z)} = \overset{\text{Verfügbares Geld}}{m}$$

erfüllen, kosten genau m Geldeinheiten. Sie liegen in der **Budget-Ebene**.

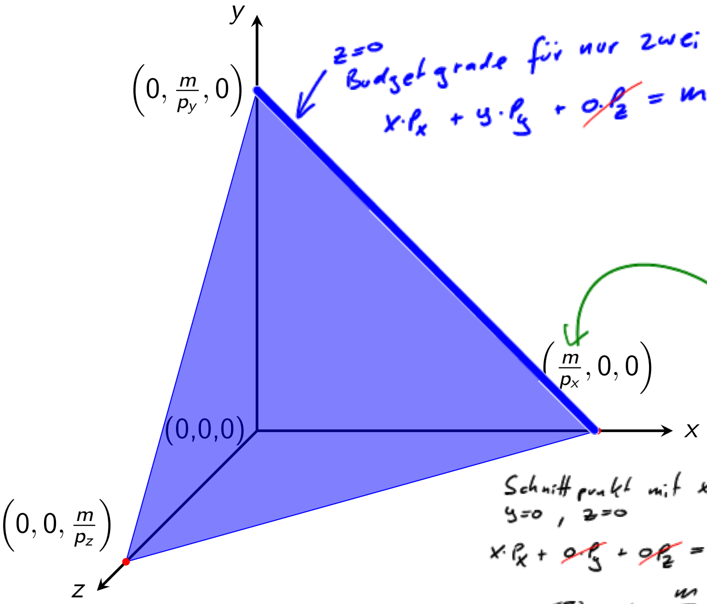
Alle Güterbündel, die man sich leisten kann, bilden die **Budget-Menge**:

"für die gilt"

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_{\geq} : p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z \leq m\right\}$$

x, y, z dürfen nicht negativ sein

Grafische Darstellung der Budget-Ebene



z=0
Budgetgrade für nur zwei Güter

$x \cdot p_x + y \cdot p_y + \cancel{0 \cdot p_z} = m$

Schnittpunkt mit x-Achse:
y=0 , z=0

$x \cdot p_x + \cancel{0 \cdot p_y} + \cancel{0 \cdot p_z} = m \quad | : p_x$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{m}{p_x}$

Abstand zwischen zwei Punkten

(Euklidischer)

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten (x, y, z) und (a, b, c) ist

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Eine **Kugel** mit Mittelpunkt (a, b, c) und Radius r ist definiert durch

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

14.5 Funktionen von n Variablen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n, b, A \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Lineare Funktion in n Variablen (für $b \neq 0$ „affin“):

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$$

Cobb-Douglas Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

mit $x_1, \ldots, x_n \geq 0$

Leontief Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \min \{a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n\}$$

Mittelwerte

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(a) arithmetisches Mittel: $\bar{x}_A := \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

(b) geometrisches Mittel: $\bar{x}_G := \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$
(für $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$)

(c) harmonisches Mittel: $\bar{x}_H := \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}$
(für $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$)

Falls $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, dann gilt allgemein:

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A$$

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Sei f eine Funktion, definiert auf einer konvexen Menge D.

f ist **konkav**, wenn für alle **a** und **b** in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

Höhleneingang Wäscheleine

$$f(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \geq \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda) f(\mathbf{b})$$

f ist **konvex**, wenn für alle **a** und **b** in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

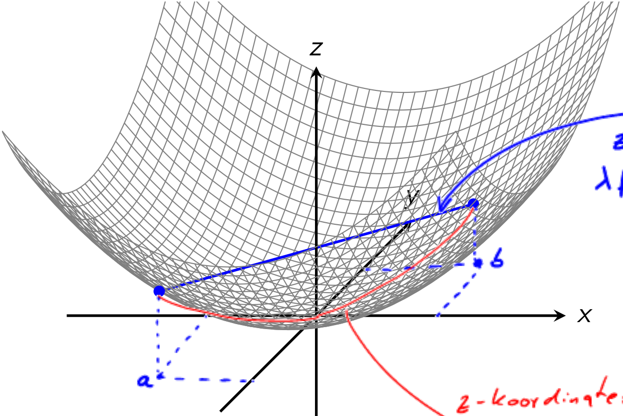
$$f(\lambda \mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1-\lambda) f(\mathbf{b})$$

Falls $D \subseteq \mathbb{R}$: Definition identisch zu Kapitel 8.

Falls $D \subseteq \mathbb{R}^n$: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sind Vektoren. Die Idee der Definition bleibt aber erhalten.

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad f'_1(x,y) = 2x \qquad f'_2(x,y) = 2y$

$z = f(x,y)$



Verbindungslinie

z-Koordinate:

$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

$0 \leq \lambda \leq 1$

z-Koordinate:

$f(\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b)$

$f''_{11} = 2 \ (>0) \qquad f''_{21} = 0$

$f''_{12} = 0 \qquad f''_{22} = 2 \ (>0)$

$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

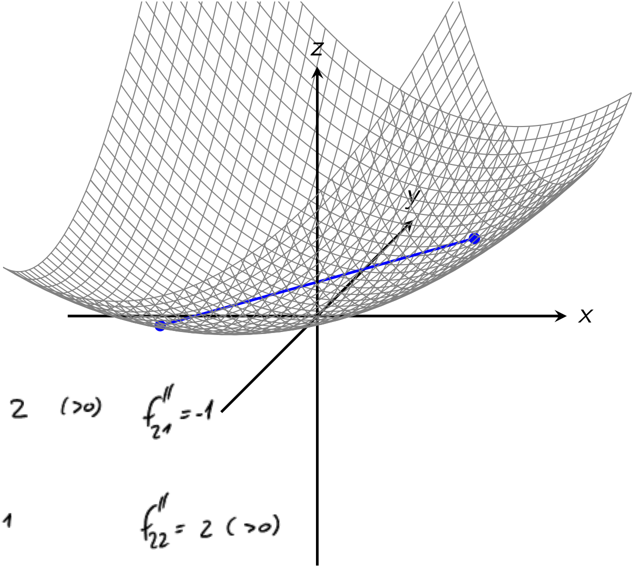
für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow f$ konvex

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

$f_1' = 2x - y$ $\quad f_2' = 2y - x$

$z = f(x, y)$

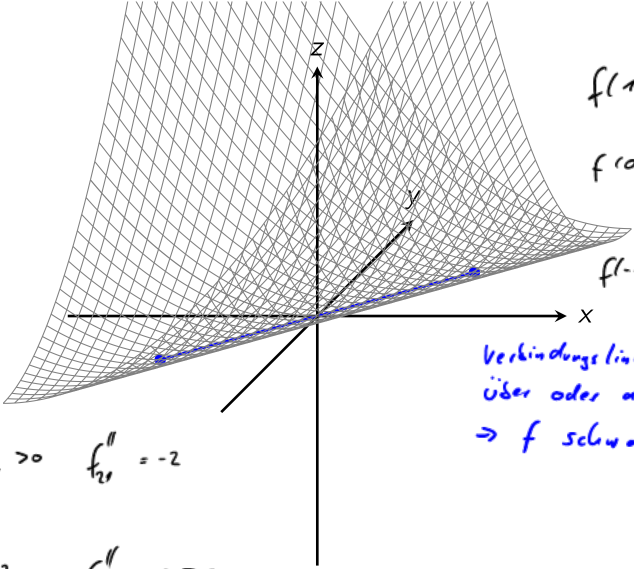


$f_{11}'' = 2 \quad (>0)$ $\quad f_{21}'' = -1$

$f_{12}'' = -1$ $\quad f_{22}'' = 2 \ (>0)$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$

$f_1' = 2x - 2y \qquad f_2' = 2y - 2x$



$z = f(x,y)$

$f(1,1) = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1$
$= 0$

$f(0,0) = 0^2 + 0^2 - 2 \cdot 0$
$= 0$

$f(-1,-1) = (-1)^2 + (-1)^2 - 2(-1)(-1)$
$= 1 + 1 - 2 = 0$

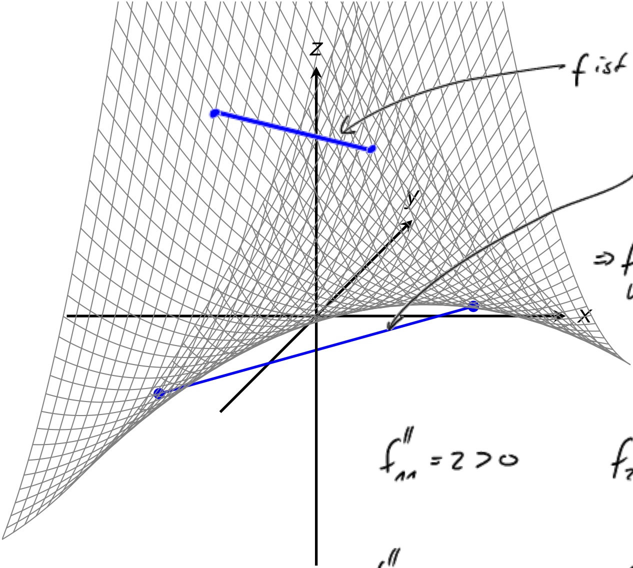
Verbindungslinie liegt über oder auf dem Graphen
$\Rightarrow$ f schwach konvex

$f_{11}'' = 2 > 0 \qquad f_{21}'' = -2$

$f_{12}'' = -2 \qquad f_{22}'' = 2 > 0$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$

$z = f(x,y)$



f ist nicht konkav

f ist nicht konvex

$\Rightarrow$ f ist weder konkav noch konvex.

$f''_{11} = 2 > 0$ $\quad$ $f''_{21} = -3$

$f''_{12} = -3$ $\quad$ $f''_{22} = 2 > 0$

Konvexität/Konkavität und 2. partielle Ableitungen

In allen ~~drei~~ vier Beispielen

- $x^2 + y^2$
- $x^2 + y^2 - xy$

streng konvex

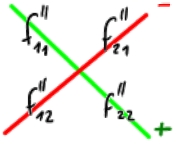
- $x^2 + y^2 - 2xy$ ← schwach konvex
- $x^2 + y^2 - 3xy$ ← weder konvex noch konkav.

gilt $f''_{11} = f''_{22} = 2 > 0$.

Es stellen jedoch nur die ersten zwei Beispiele streng konvexe Funktionen dar.

Bei multivariaten Funktionen kommt es nicht nur auf die Vorzeichen von f''_{ii} an, sondern auf alle zweiten partiellen Ableitungen.

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix



Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex } \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} \geq 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} \geq f''_{12} f''_{21}$$

$$f \text{ streng konvex } \Leftarrow f''_{11}, f''_{22} > 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} > f''_{12} f''_{21}$$

$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} \leq 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} \geq f''_{12} f''_{21}$$

$$f \text{ streng konkav } \Leftarrow f''_{11}, f''_{22} < 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} > f''_{12} f''_{21}$$

Beachte, dass jede zweite partielle Ableitung von dem jeweiligen Punkt (x, y) abhängen kann. Die Ungleichungen müssen für jeweils alle Punkte $(x, y) \in D$ gelten.

Falls in einem Punkt (x, y) gilt, dass $f''_{11} f''_{22} < f''_{12} f''_{21}$, dann ist die Funktion weder konvex noch konkav.

$f(x,y) = x^2 + y^2 - t \cdot x \cdot y$, t feste Zahl

$f'_1 = 2x - ty$ $\qquad f'_2 = 2y - tx$

$f''_{11} = 2$ $\qquad f''_{21} = -t$ $\qquad$ Es gilt

$f''_{11}, f''_{22} > 0$

$f''_{12} = -t$ $\qquad f''_{22} = 2$ $\qquad f''_{11} \cdot f''_{22} \overset{?}{>} f''_{12} \cdot f''_{21}$

$2 \cdot 2 \overset{?}{>} (-t) \cdot (-t) = t^2$

$\Leftrightarrow \quad -2 < t < 2 \quad \Rightarrow$ f ist streng konvex

Falls $t = -2$ oder $t = 2 \quad \Rightarrow$ f ist konvex

Falls $t < -2$ oder $t > 2 \quad \Rightarrow$ f ist weder konvex noch konkav

Beispiel $f(x,y) = x^2 + y^2 - t \cdot xy$

$$\begin{aligned} f_1'(x,y) &= 2x - ty \\ f_2'(x,y) &= 2y - tx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11}''(x,y) &= 2 & \qquad f_{12}''(x,y) &= -t \\ f_{21}''(x,y) &= -t & \qquad f_{22}''(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

Es gilt $f_{11}'', f_{22}'' > 0 \checkmark$

Zweite Ungleichung $f_{11}'' f_{22}'' \geq f_{12}'' f_{21}''$:

$$2 \cdot 2 \geq (-t) \cdot (-t) \Leftrightarrow 4 \geq t^2 \Leftrightarrow |t| \leq 2$$

Die Funktion f ist also schwach konvex genau dann wenn $|t| \leq 2$.
Falls $|t| < 2$, so ist f streng konvex.
Falls $|t| > 2$, dann ist f weder konvex noch konkav.

14.9 Ökonomische Anwendung: Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$f''_{11} \le 0 \Leftrightarrow c \le 1$

$f''_{11} < 0 \Leftrightarrow c < 1$

$f''_{22} \le 0 \Leftrightarrow d \le 1$

$f''_{22} < 0 \Leftrightarrow d < 1$

Die Hesse-Matrix der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$f(x,y) = Ax^c y^d \text{ mit } c,d > 0$$

haben wir für $x, y > 0$ bereits berechnet:

$$f''(x,y) = f(x,y)\begin{pmatrix} \overbrace{-\frac{c}{x}\frac{1-c}{x}}^{\le 0 \,/\, <0\,?} & \frac{c}{x}\frac{d}{y} \\ \frac{c}{x}\frac{d}{y} & \underbrace{-\frac{d}{y}\frac{1-d}{y}}_{\le 0 \,/\, <0\,?} \end{pmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen ist die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (streng) konkav für $x, y > 0$?

$f''_{11} \le 0 \; (<0)$ falls $-\frac{c}{x}\frac{1-c}{x} \le 0 \; (<0)$

$\Leftrightarrow \underbrace{-c}_{<0}(1-c) \le 0 \quad |:(-c) \quad \Leftrightarrow 1-c \ge 0 \Leftrightarrow 1 \ge c$

$$f''_{11}\cdot f''_{22} \overset{?}{\geq} f''_{21}\cdot f''_{12}$$

$$\overbrace{\underbrace{\cancel{f(x,y)}}_{>0}\cdot\left(-\frac{c}{x}\;\frac{1-c}{x}\right)}^{f''_{11}}\cdot\overbrace{\cancel{f(x,y)}\left(-\frac{d}{y}\;\frac{1-d}{y}\right)}^{f''_{22}} \overset{?}{\geq} \overbrace{\cancel{f(x,y)}\cdot\;\frac{c}{x}\cdot\frac{d}{y}}^{f''_{21}}\;\cdot\overbrace{\cancel{f(x,y)}\cdot\frac{c}{x}\cdot\frac{d}{y}}^{f''_{12}}$$

$$\frac{c\,(1-c)\,d\,(1-d)}{x\cdot x\cdot y\cdot y} \overset{?}{\geq} \frac{c\cdot d\cdot c\cdot d}{x\cdot y\cdot x\cdot y} \quad \Big|\; x\cdot x\cdot y\cdot y$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{c}(1-c)\cancel{d}(1-d) \geq \cancel{c}\cdot\cancel{d}\cdot c\cdot d$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(1-c)(1-d)}_{} \geq c\cdot d$$

$$= 1-d-c+\cancel{c\cdot d} \geq \cancel{c\cdot d}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{1 \geq c+d}$$

Vergleiche $\overset{x_1\ y_1}{(0,0)}$ $\quad \overset{\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)}{(1,1)}$ $\quad \overset{x_2\ y_2}{(2,2)}$

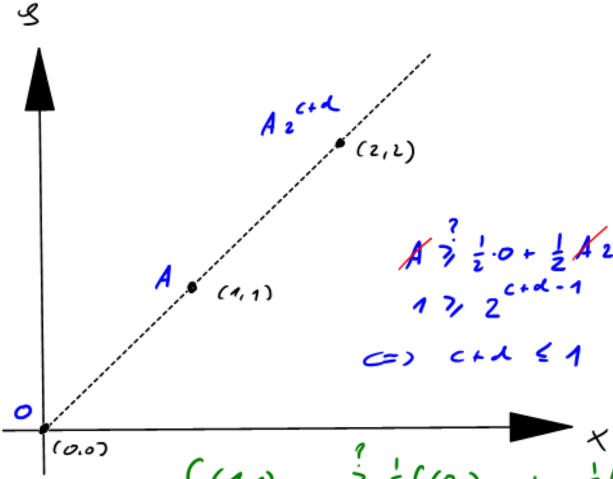
für $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f(0,0) = A \cdot 0^c \cdot 0^d = 0$$

$$f(1,1) = A \cdot 1^c \cdot 1^d = A$$

$$f(2,2) = A \cdot 2^c \cdot 2^d = A\,2^{c+d}$$

$f(x,y) = A x^c y^d$



$$\cancel{A} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cancel{A}\, 2^{c+d}$$

$$1 \geq 2^{c+d-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad c+d \leq 1$$

$$f(1,1) \overset{?}{\geq} \frac{1}{2} f(0,0) + \frac{1}{2} f(2,2)$$

f ist konkav, falls $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \geq \lambda f(x_1, y_1) + (1-\lambda) f(x_2, y_2)$

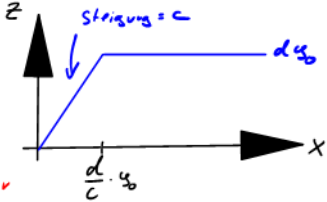
$$f(x,y) = A \cdot x^c \cdot y^d$$

ist schwach konkav, falls: (streng)

- $0 \leq c \leq 1$ $\quad$ $0 < c < 1$
- $0 \leq d \leq 1$ $\quad$ $0 < d < 1$
- $c + d \leq 1$ $\quad$ $c + d < 1$

Normalfall (konstante Skalenerträge): $c + d = 1$

14.9 Ökonomische Anwendung: Leontief Produktionsfunktion



$g(x,y) = c \cdot x$ konkav ✓

$h(x,y) = dy$ konkav

Die Leontief Produktionsfunktion ist definiert durch:

$$f(x, y) = \min\{cx, dy\} \text{ mit } c, d > 0$$

Problem: Entlang der Gerade $cx = dy$ hat die Funktion eine Falte; sie ist dort nicht differenzierbar.

$$f(x, y_0) = \begin{cases} cx & \text{falls } cx \leq dy_0 \\ dy_0 & \text{falls } cx > dy_0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{d}{c} \cdot y_0 \end{cases}$$

Ist diese Produktionsfunktion (streng) konkav?

f ist das Minimum zweier konkaver Funktionen und damit ebenfalls konkav.

Zusammenfassung

- Funktionen mit zwei und mehr Variablen
- Geometrische Darstellung:
  Höhenlinien als Isoquanten & Indifferenzkurven
- Ebenen und Abstand
- Partielle erste und zweite Ableitungen:
  Gradient und Hesse-Matrix
- Konvexe Mengen
- Konkave und konvexe Funktionen