

Funktionen mehrerer Variablen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

14.1 Funktionen von zwei Variablen

14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

14.3 Geometrische Darstellung

14.4 Flächen

14.5 Funktionen von n Variablen

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

14.9 Ökonomische Anwendung: Produktionsfunktion

14.1 Funktionen von zwei Variablen

Definitionsbereich
ist eine Teilmenge
x-y-Ebene

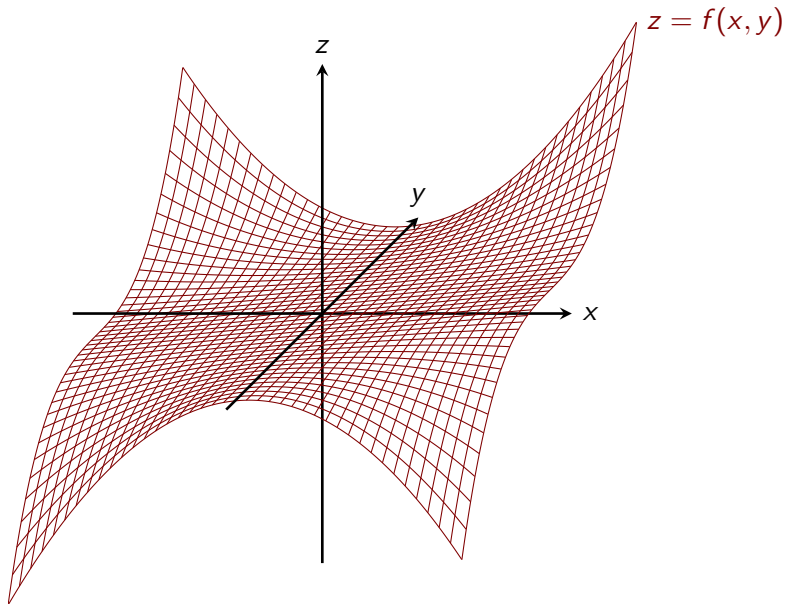
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y mit Definitionsbereich D ist eine Regel, die eine genau spezifizierte Zahl

$$f(x, y) \in \mathbb{R} \text{ zu jedem Punkt } (x, y) \in D$$

festlegt.

Beispiel: $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



$$f(x, y) = 2x + x^2 y^3$$

Gebe die Werte von f für folgende Zahlenpaare an:

a) $(x, y) = (1, 0)$ $f(1, 0) = 2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 0^3 = 2$

b) $(x, y) = (0, 1)$ $f(0, 1) = 2 \cdot 0 + 0^2 \cdot 1^3 = 0$

c) $(x, y) = (-2, 3)$ $f(-2, 3) = 2 \cdot (-2) + (-2)^2 \cdot 3^3 = -4 + 4 \cdot 27 = 26 \cdot 4$
 $= 25 \cdot 4 + 4 = 104$

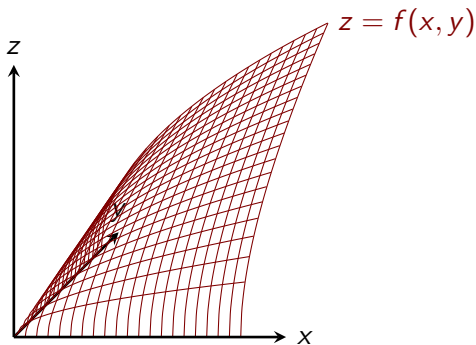
d) $(x, y) = (a+1, b)$

$$f(a+1, b) = 2(a+1) + (a+1)^2 b^3$$

Beispiel: Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

mit $A, c, d > 0$.



14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Falls $z = f(x, y)$, dann ist

- ▶ $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x , wenn y konstant gehalten wird.
- ▶ $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y , wenn x konstant gehalten wird.

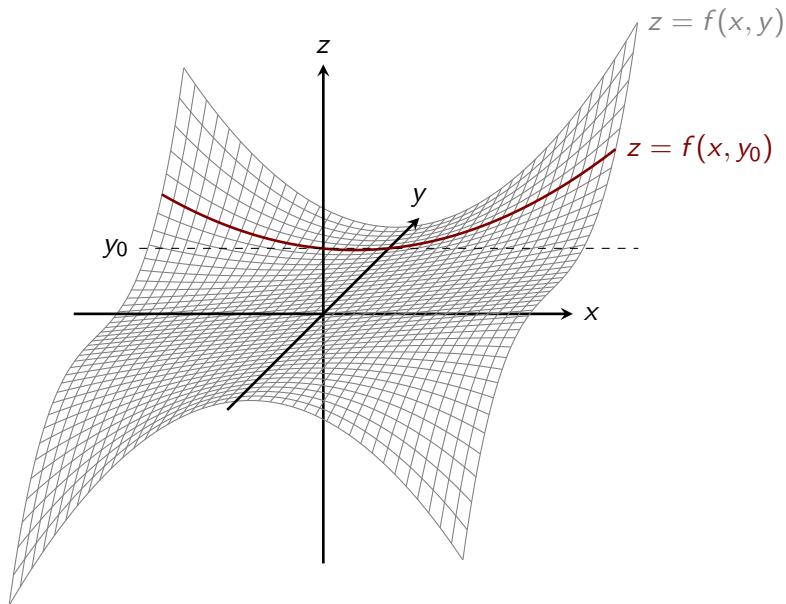
Definition: $f'_x(x, y)$

$$\text{▶ } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_1(x, y) := \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

$$\text{▶ } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f'_2(x, y) := \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(x, y+dy) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$f'_y(x, y)$

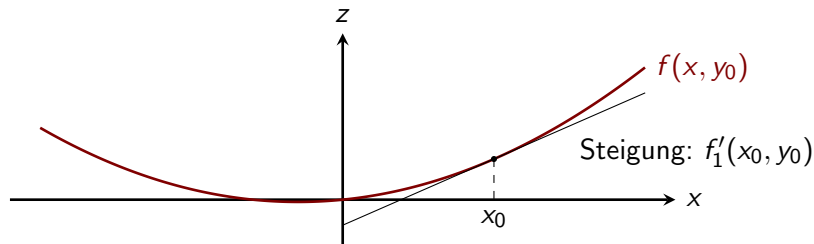
Beispiel $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



Partielle Ableitung nach x

$$f(x, y_0) = 2x + x^2 y_0^3$$

Betrachte die Variable y als konstanten Parameter: $y = y_0$



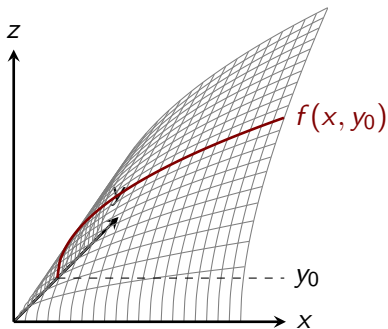
$$f'_1(x, y_0) = 2 + 2xy_0^3$$

$$f(x, y) = 2x + x^2 \cdot y^3$$

$$f_2'(x, y) = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2 \cdot y^2$$

Cobb-Douglas-Funktion $f(x, y) = Ax^c y^d$

mit $A, c, d > 0$.

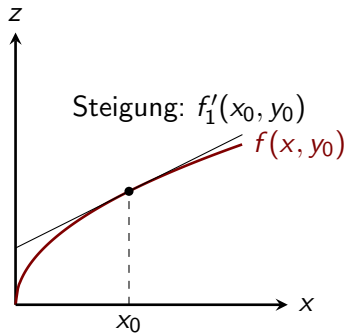


Cobb-Douglas-Funktion

$$f_2'(x, y) = \frac{d}{y} \cdot f(x, y)$$

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

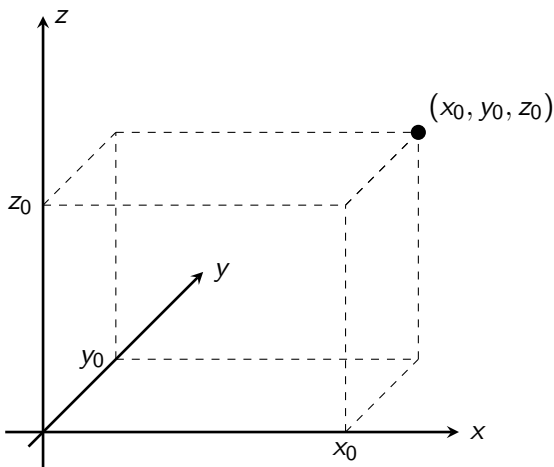
mit $A, c, d > 0$.



$$\begin{aligned} f_1'(x, y) &= A \cdot c \cdot x^{c-1} \cdot y^d = c \cdot A \cdot x^c \cdot x^{-1} \cdot y^d \\ &= c \cdot x^{-1} \cdot A \cdot x^c \cdot y^d = \frac{c}{x} \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

14.3 Geometrische Darstellung

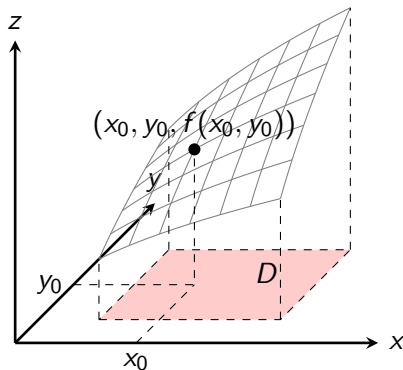
Koordinatensystem mit drei Dimensionen



$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$: „nichtnegativer Oktant“

Der Graph einer Funktion von zwei Variablen

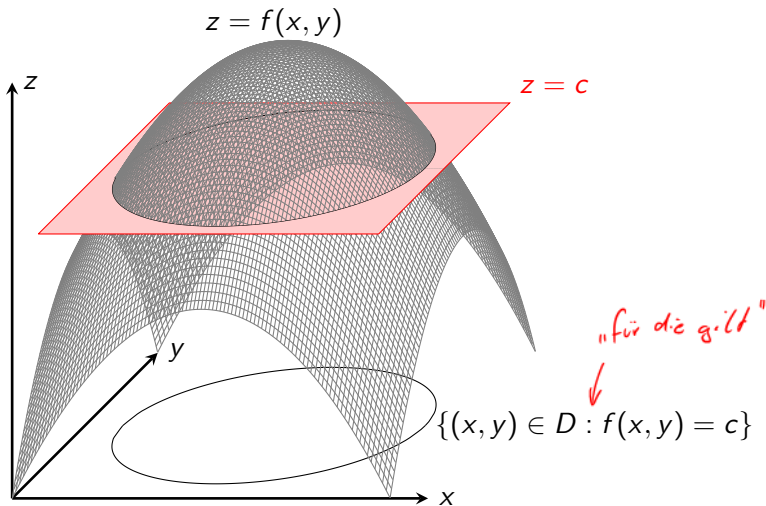
Der **Graph der Funktion** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$:



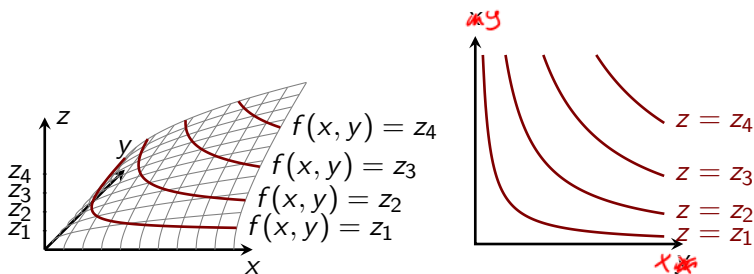
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

Höhenlinien

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + A$$



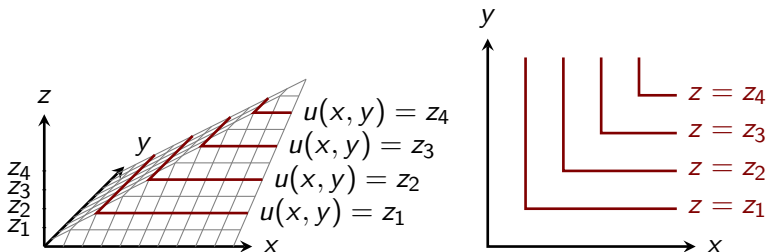
Isoquanten der Cobb-Douglas Produktionsfunktion



Eine **Isoquante** („gleich Menge“) gibt an, mit welchen Inputkombinationen (x, y) die Menge z produziert werden kann.

Isoquanten sind Projektionen der Höhenlinien von Produktionsfunktionen auf die Ebene der Inputmengen.

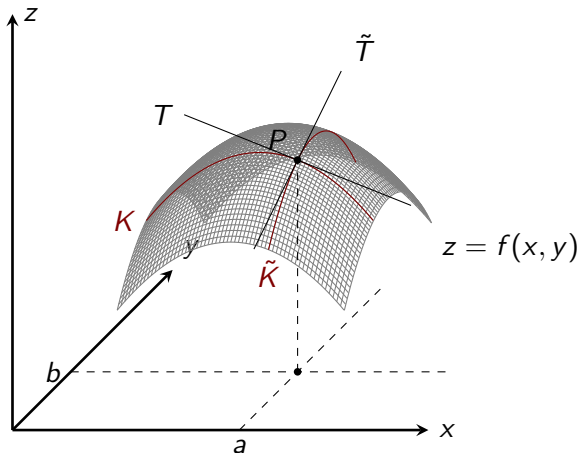
Indifferenzkurven für perfekte Komplemente



Eine **Indifferenzkurve** gibt an, welche Güterbündel (x, y) den gleichen Nutzen generieren.

Indifferenzkurven sind Projektionen der Höhenlinien von Nutzenfunktionen auf die Ebene der Güterbündel.

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen

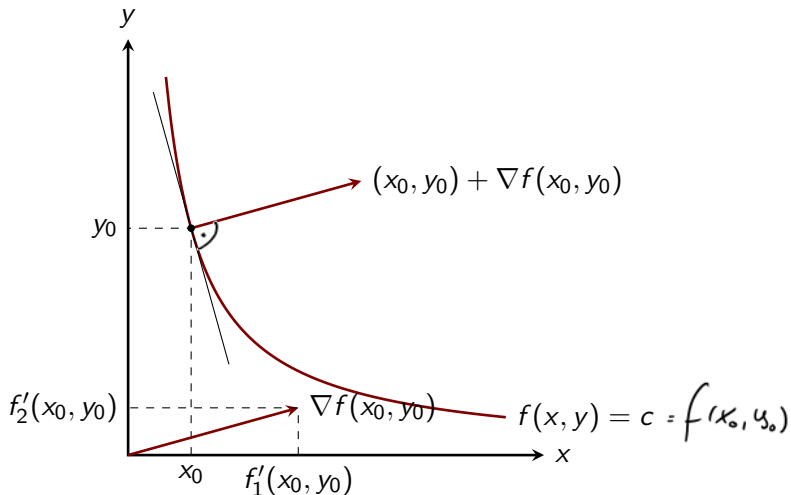


Steigung von T : $f'_1(a, b)$

Steigung von $\tilde{T}$: $f'_2(a, b)$

Der Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x, y) = (f'_1(x, y), f'_2(x, y))$$



Der Gradient einer Cobb-Douglas Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

1. partielle Ableitungen:

$$f'_1(x, y) = \frac{c}{x} \cdot f(x, y)$$

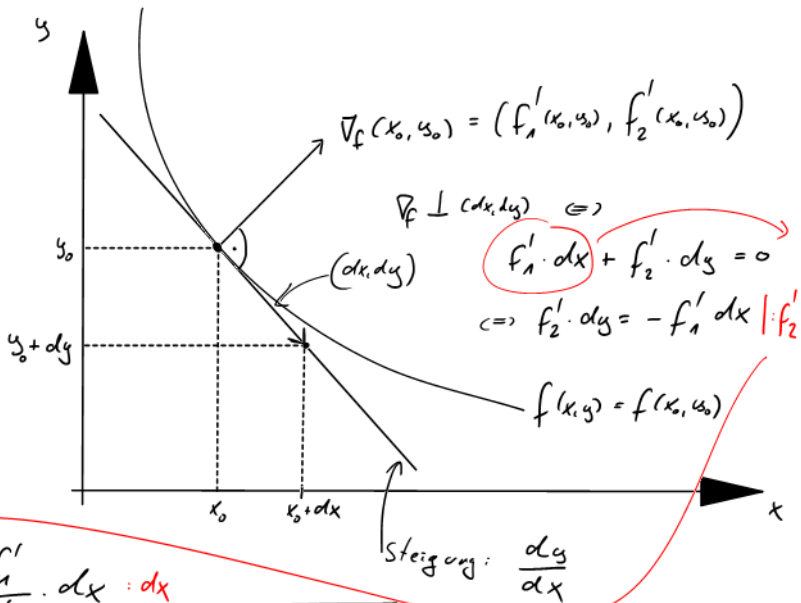
$$f'_2(x, y) = \frac{d}{y} \cdot f(x, y)$$

Gradient

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{c}{x} \cdot f(x, y), \frac{d}{y} \cdot f(x, y) \right) = \left(\frac{c}{x}, \frac{d}{y} \right) \cdot f(x, y)$$

Handwritten notes:

- Richtung* (Direction) under the vector $\left(\frac{c}{x}, \frac{d}{y} \right)$
- Vorlängerung falls $f > 1$* (Extension if $f > 1$) and *Verkürzung falls $f < 1$* (Shortening if $f < 1$) under the scalar $f(x, y)$



$$\Rightarrow dy = -\frac{f'_1}{f'_2} \cdot dx \quad : dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1}{f'_2}}$$

Hohenlinie erfüllt $f(x, y) = f(x_0, y_0)$

$$A \cdot \underbrace{x^c} \cdot \underbrace{y^d} = \underbrace{A \cdot x_0^c \cdot y_0^d}_{\text{Zahl, da } x_0, y_0 \text{ fest.}}$$

$$A \cdot (c x^{c-1} \cdot y^d + x^c \cdot d y^{d-1} \cdot y') = 0$$

$$\underbrace{A c x^{c-1} y^d}_{f'_1(x, y)} + \underbrace{A x^c \cdot d y^{d-1}}_{f'_2(x, y)} y' = 0 \quad | - f'_1$$

$$\Leftrightarrow f'_2(x, y) \cdot y' = - f'_1(x, y) \quad | : f'_2$$

$$\Leftrightarrow y' = - \frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}$$

Zweite partielle Ableitungen in zwei Variablen

Für jede der beiden Variablen x und y von f gibt es zwei partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{21} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = f''_{22}$$

Insgesamt gibt es also vier zweite partielle Ableitungen.

Zweite Ableitungen von $f(x, y) = 2x + x^2y^3$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2 + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} = 2 \cdot y^3$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial y)^2} = 6x^2y$$

Zweite Ableitungen von $f(x, y) = Ax^c y^d$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \underbrace{f(x, y)}_{\text{red underline}} c x^{-1}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f(x, y) d y^{-1}$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} = -f(x, y) \cdot c \cdot x^{-2} (1 - c)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) \cdot c \cdot x^{-1} \cdot d y^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = f(x, y) \cdot d y^{-1} \cdot c x^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial y)^2} = -f(x, y) \cdot d y^{-2} (1 - d)$$

$$f''_{11}(x, y) = \underbrace{f'_1(x, y)}_{f(x, y) \cdot c \cdot x^{-1}} \cdot c \cdot x^{-1} + f(x, y) \cdot (-1) \cdot c \cdot x^{-2}$$

$$= \underline{f(x, y)} \cdot \underline{c} \cdot x^{-1} \cdot c \cdot x^{-1} - \underline{f(x, y)} \cdot \underline{c} \cdot \underline{x^{-2}}$$

$$= \underline{f(x, y)} \cdot \underline{c} \cdot \underline{x^{-2}} (c - 1)$$

$$= -f(x, y) \cdot c \cdot x^{-2} (1 - c)$$

$$f'_2(x, y) = \underline{f(x, y)} \cdot \underline{d \cdot y^{-1}}, \quad f'_1(x, y) = f(x, y) \cdot c \cdot x^{-1}$$

$$f''_{21}(x, y) = f'_1(x, y) \cdot d \cdot y^{-1} = f(x, y) \cdot c \cdot x^{-1} \cdot d \cdot y^{-1}$$

$$f''_{12}(x, y) = f'_2(x, y) \cdot c \cdot x^{-1} = f(x, y) \cdot d \cdot y^{-1} \cdot c \cdot x^{-1}$$

$$f_2'(x, y) = \underbrace{f(x, y)} \cdot \underbrace{d \cdot y^{-1}}$$

$$\begin{aligned} f_{22}''(x, y) &= f(x, y) \cdot d \cdot y^{-1} \cdot dy^{-1} + f(x, y) \cdot (-1) d y^{-2} \\ &= f(x, y) \cdot d y^{-2} (d - 1) \\ &= -f(x, y) \cdot d \cdot y^{-2} (1 - d) \end{aligned}$$

$$f''(x,y) = f'(x,y) \begin{pmatrix} -\frac{c}{x} & \frac{1-c}{x} & \frac{c}{x} & \frac{d}{y} \\ \frac{c}{x} & \frac{d}{y} & -\frac{d}{y} & \frac{1-d}{y} \end{pmatrix}$$

$$f''_{11} = -f'(x,y) c x^{-2} (1-c)$$

Ü f'' für $c+d=1$

Hesse-Matrix an der Stelle (x, y)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) \in D$.

Die Ableitungen f''_{12} und f''_{21} nennen wir auch „Kreuzableitungen“

Wenn alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$f''_{12}(x, y) = f''_{21}(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in D .$$

Hessematrix der Cobb-Douglas Funktion

$$f''(x, y) =$$

14.4 Flächen: Eine Ebene im Raum

$$ax + by + cz = d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit nicht $a = b = c = 0$ fest und $x, y, z \in \mathbb{R}$ variabel.

Alle Punkte (x, y, z) , welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer **Ebene**.

Falls nicht $a = b = 0$, dann definiert $ax + by + c \cdot 0 = d$ die Schnittgerade der Ebene mit der xy -Ebene.

Ökonomische Anwendung: Budget-Ebene

Seien $x, y, z \geq 0$ Mengen dreier Güter und

seien $p_x, p_y, p_z > 0$ deren Preise.

Sei zusätzlich $m \geq 0$ das verfügbare Einkommen.

Alle Punkte (x, y, z) welche die Gleichung

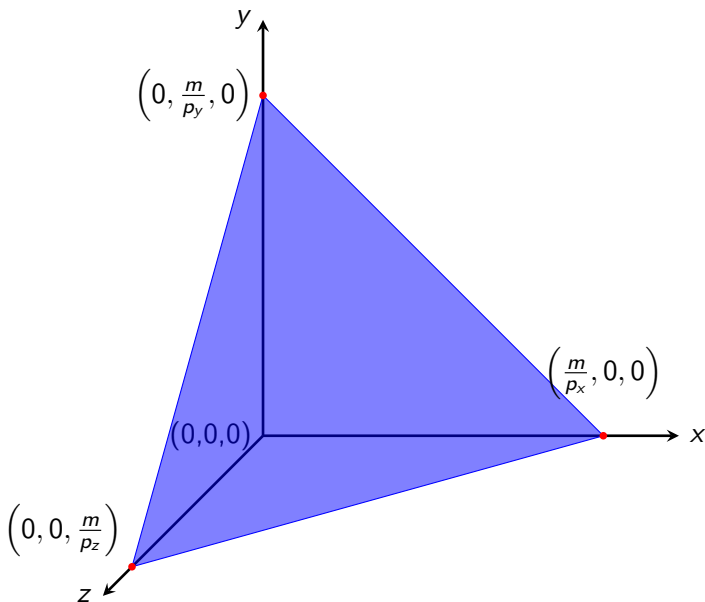
$$p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z = m$$

erfüllen, kosten genau m Geldeinheiten. Sie liegen in der
Budget-Ebene.

Alle Güterbündel, die man sich leisten kann, bilden die
Budget-Menge:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_{\geq}^3 : p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z \leq m\}$$

Grafische Darstellung der Budget-Ebene



Abstand zwischen zwei Punkten

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten (x, y, z) und (a, b, c) ist

$$d = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

Eine **Kugel** mit Mittelpunkt (a, b, c) und Radius r ist definiert durch

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

14.5 Funktionen von n Variablen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \dots, a_n, b, A \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Lineare Funktion in n Variablen (für $b \neq 0$ „affin“):

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b$$

Cobb-Douglas Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

mit $x_1, \dots, x_n \geq 0$

Leontief Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \min \{a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n\}$$

Mittelwerte

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(a) arithmetisches Mittel: $\bar{x}_A := \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

(b) geometrisches Mittel: $\bar{x}_G := \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$
(für $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$)

(c) harmonisches Mittel: $\bar{x}_H := \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$
(für $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$)

Falls $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, dann gilt allgemein:

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A$$

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Sei f eine Funktion, definiert auf einer konvexen Menge D .

f ist **konkav**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) \geq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{b})$$

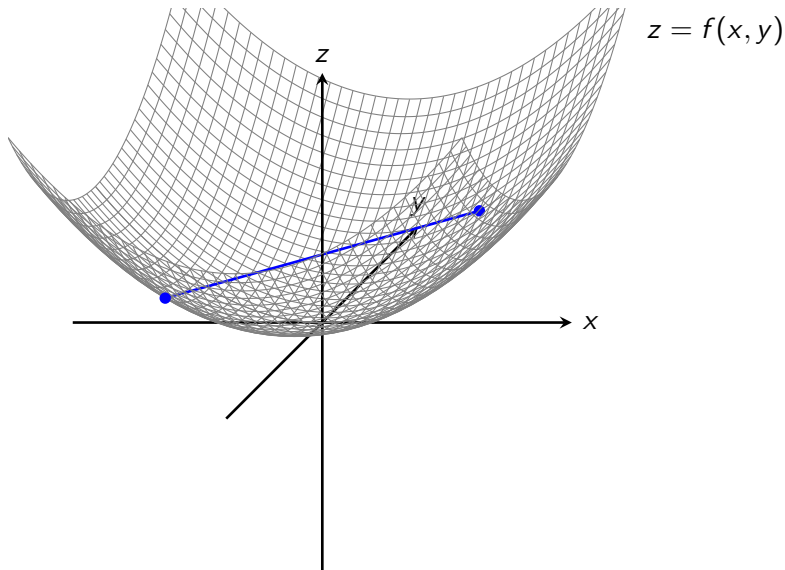
f ist **konvex**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{b})$$

Falls $D \subset \mathbb{R}$: Definition identisch zu Kapitel 8.

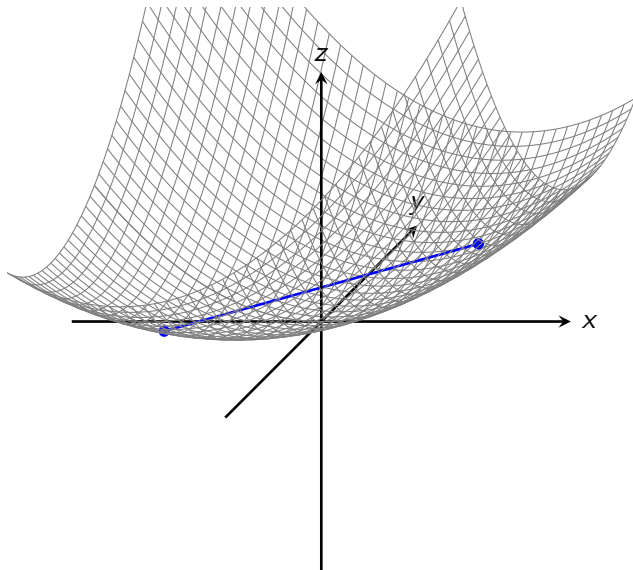
Falls $D \subset \mathbb{R}^n$: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sind Vektoren. Die Idee der Definition bleibt aber erhalten.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$



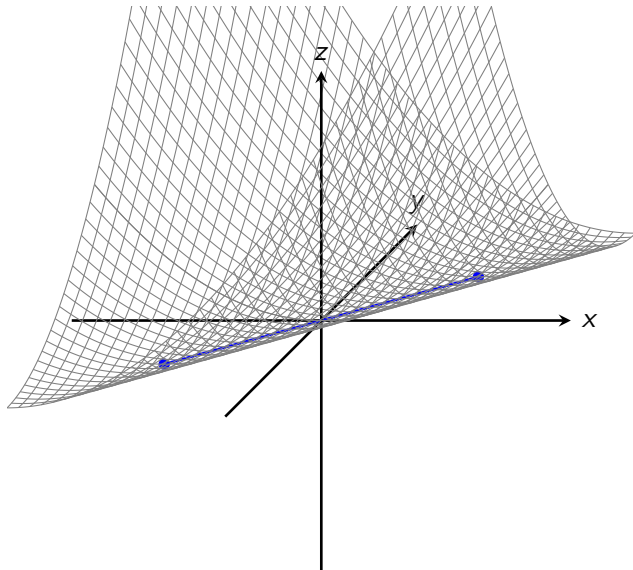
Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

$$z = f(x, y)$$



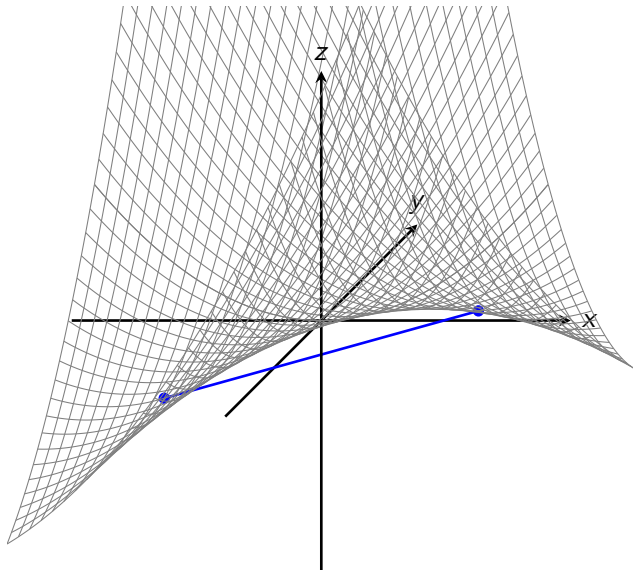
Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

$$z = f(x, y)$$



Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$

$$z = f(x, y)$$



Konvexität/Konkavität und 2. partielle Ableitungen

In allen drei Beispielen

▶ $x^2 + y^2$

▶ $x^2 + y^2 + xy$

▶ $x^2 + y^2 + 2xy$

▶ $x^2 + y^2 + 3xy$

gilt $f''_{11} = f''_{22} = 2 > 0$.

Es stellen jedoch nur die ersten zwei Beispiele streng konvexe Funktionen dar.

Bei multivariaten Funktionen kommt es nicht nur auf die Vorzeichen von f''_{ii} an, sondern auf alle zweiten partiellen Ableitungen.

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''_{11} \geq 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} \geq f''_{12}f''_{21}$$

$$f \text{ streng konvex} \Leftrightarrow f''_{11} > 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} > f''_{12}f''_{21}$$

$$f \text{ konkav} \Leftrightarrow f''_{11} \leq 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} \geq f''_{12}f''_{21}$$

$$f \text{ streng konkav} \Leftrightarrow f''_{11} < 0 \text{ und } f''_{11}f''_{22} > f''_{12}f''_{21}$$

Beachte, dass jede zweite partielle Ableitung von dem jeweiligen Punkt (x, y) abhängen kann. Die Ungleichungen müssen für jeweils alle Punkte $(x, y) \in D$ gelten.

Falls in einem Punkt (x, y) gilt, dass $f''_{11}f''_{22} < f''_{12}f''_{21}$, dann ist die Funktion weder konvex noch konkav.

Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2 + t \cdot xy$

$$f'_1(x, y) = 2x + ty$$

$$f'_2(x, y) = 2y + tx$$

$$f''_{11}(x, y) = 2$$

$$f''_{21}(x, y) = t$$

$$f''_{12}(x, y) = t$$

$$f''_{22}(x, y) = 2$$

Es gilt $f''_{11} > 0$ ✓

Zweite Ungleichung $f''_{11}f''_{22} \geq f''_{12}f''_{21}$:

$$2 \cdot 2 \geq t \cdot t \Leftrightarrow t \leq |2|$$

Die Funktion f ist also schwach konvex genau dann wenn $t \leq |2|$.

Falls $|t| < 2$, so ist f streng konvex.

Falls $|t| > 2$, dann ist f weder konvex noch konkav.

14.9 Ökonomische Anwendung: Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Die Hesse-Matrix der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d \text{ mit } c, d > 0$$

haben wir für $x, y > 0$ bereits berechnet:

$$f''(x, y) = f(x, y) \begin{pmatrix} -\frac{c}{x} \frac{1-c}{x} & \frac{c}{x} \frac{d}{y} \\ \frac{c}{x} \frac{d}{y} & -\frac{d}{y} \frac{1-d}{y} \end{pmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen ist die
Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (streng) konkav?

14.9 Ökonomische Anwendung: Leontief Produktionsfunktion

Die Leontief Produktionsfunktion ist definiert durch:

$$f(x, y) = \min\{cx, dy\} \text{ mit } c, d > 0$$

Problem: Entlang der Gerade $cx = dy$ hat die Funktion eine Falte; sie ist dort nicht differenzierbar.

$$f(x, y_0) = \begin{cases} cx & \text{falls } cx \leq dy_0 \\ dy_0 & \text{falls } cx > dy_0 \end{cases}$$

Ist diese Produktionsfunktion (streng) konkav?

Zusammenfassung

- ▶ Funktionen mit zwei und mehr Variablen
- ▶ Geometrische Darstellung:
Höhenlinien als Isoquanten & Indifferenzkurven
- ▶ Ebenen und Abstand
- ▶ Partielle erste und zweite Ableitungen:
Gradient und Hesse-Matrix
- ▶ Konvexe Mengen
- ▶ Konkave und konvexe Funktionen