

Integration



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

10.1 Unbestimmte Integrale

10.2 Flächen und bestimmte Integrale

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

10.4 Ökonomische Anwendung

10.5 Partielle Integration

~~10.6 Integration durch Substitution~~

~~10.7 Integration über unendliche Intervalle~~

Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte

Integralrechnung

Wir haben bisher das Ableiten kennengelernt:

Die Ableitung f' einer Funktion f ist die Steigung dieser Funktion.

In diesem Kapitel gehen wir den umgekehrten Weg:

Wir wollen für eine gegebene Funktion f wissen, von welcher Funktion F die Funktion f die Ableitung ist.

Integralrechnung

Wir nennen die „aufgeleitete“ Funktion F die **Stammfunktion** von f und den Vorgang, F zu bestimmen, **integrieren**.

Die Integralregeln sind den Ableitungsregeln sehr ähnlich, bloß „rückwärts“.

Geometrische Interpretation der Stammfunktion F :

Fläche unterhalb des Graphens von f .

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften:

- ▶ Maß für Handelsgewinne von Konsument:innen
- ▶ Maß für Kosten und Gewinne von Firmen
- ▶ Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
- ▶ ...

10.1 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Seien f und F stetige Funktionen und sei F differenzierbar.

Wenn f die Ableitung von F ist, so nennen wir F ein **unbestimmtes Integral** oder eine **Stammfunktion** von f und wir schreiben:

$$\int f(x) dx = F(x) + C ,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

$\int$: **Integralzeichen**

$f(x)$: **Integrand**

x : **Integrationsvariable** (gekennzeichnet durch dx)

C : **Integrationskonstante**

Einige wichtige Integrale

Wenn $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -1$, dann gilt:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

Beispiele:

$$\int x \, dx =$$

$$\int \frac{1}{x^3} \, dx =$$

$$\int \sqrt{x} \, dx =$$

Das Integrationszeichen $\int$



Das Integrationszeichen $\int$ ist aus dem langen s „ſ“ der Frakturschrift entstanden.

Der Buchstabe ſ steht für lat. *summa* und deutet darauf hin, dass ein Integral eigentlich eine Summe ist.

Grundlegende Integrationsregeln

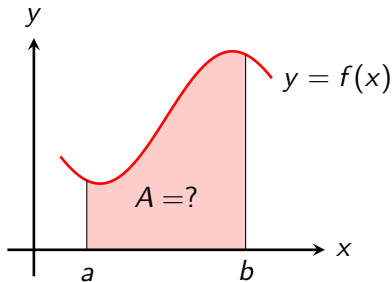
Wie bei Summen gilt:

$$\int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx, \text{ wobei } a \text{ eine Konstante ist}$$

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

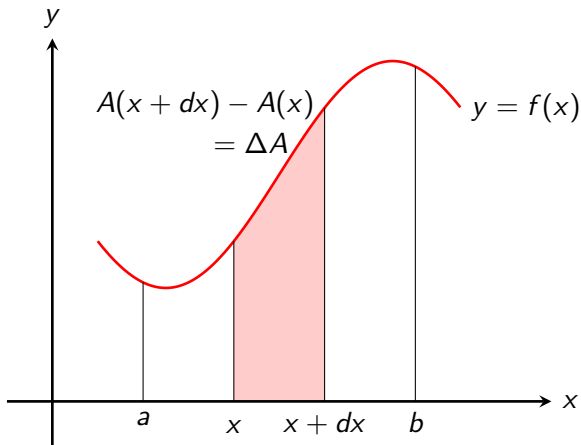
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Wie berechnen wir die Fläche A unter dem Graphen einer stetigen und nichtnegativen Funktion f über dem Intervall $[a, b]$?



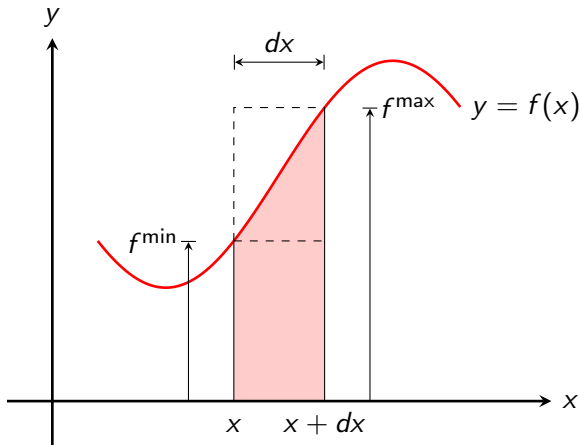
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Zunächst: die Fläche des Teilintervalls $[x, x + dx]$



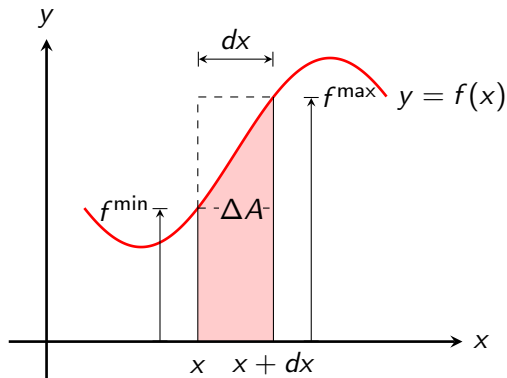
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Die Fläche ΔA zwischen $[x, x + dx]$ ist **mindestens** so groß wie $dx \cdot f^{\min}$ und **höchstens** so groß wie $dx \cdot f^{\max}$:



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

$$f^{\min} \cdot dx \leq \Delta A \leq f^{\max} \cdot dx \Leftrightarrow f^{\min} \leq \frac{A(x+dx) - A(x)}{dx} \leq f^{\max}$$



$$\Delta A / dx \xrightarrow{dx \rightarrow 0} f(x)$$

Wir betrachten nun den Fall $dx \rightarrow 0$:

Es gilt:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} f^{\min} = \lim_{dx \rightarrow 0} f^{\max} = f(x)$$

und:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} = A'(x)$$

Wegen

$$f^{\min} \leq \frac{A(x + dx) - A(x)}{dx} \leq f^{\max}$$

folgt:

$$A'(x) = f(x)$$

Fläche A als ein unbestimmtes Integral

Sei f eine stetige und nicht-negative Funktion.

Mit $A'(x) = f(x)$ gilt also

$$\int f(x) \, dx = \int A'(x) \, dx = A(x) = F(x) + C$$

Die Fläche A ist also ein unbestimmtes Integral der Funktion f .

Das bestimmte Integral

Sei f eine stetige Funktion und sei F die Stammfunktion von f .

Dann heißt die Differenz $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$.

Das bestimmte Integral bezeichnen wir mit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx = \left. F(x) \right|_a^b \text{ oder } [F(x)]_a^b$$

Die Zahlen a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**.

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

▶ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

▶ $\int_a^a f(x) dx = 0$

▶ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ für $a < c < b$

▶ $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

Differenzieren bezüglich der Integrationsgrenzen

Sei f eine stetige Funktion mit Stammfunktion F .

Dann gilt:

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x) dx = F'(b) = f(b) .$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx = -F'(a) = -f(a) .$$

10.4 Ökonomische Anwendungen

- ▶ Konsumentenrente
- ▶ Kosten
- ▶ Produzentenrente
- ▶ Wahrscheinlichkeiten
- ▶ Erwartungswerte

Konsumentenrente KR

Die inverse Nachfragefunktion $P(q)$ misst, welchen Reservationspreis die Konsument:innen für die nächste kleine Menge dq zu zahlen bereit sind, wenn bereits $q \geq 0$ Einheiten konsumiert werden.

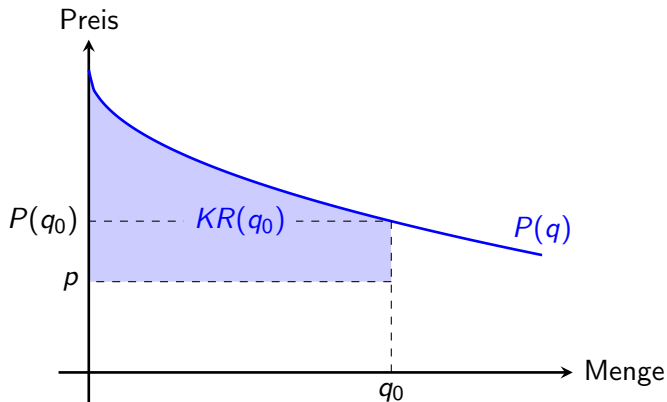
Wenn das gehandelte Gut für den Preis p gekauft werden kann, dann „gewinnen“ die Konsument:innen ungefähr $(P(q) - p) dq$ durch den Kauf der nächsten kleinen Menge dq .

Die Summe dieser Handelsgewinne wird als Konsument:innenrente bezeichnet:

$$KR(q_0) = \int_0^{q_0} (P(q) - p) dq = \int_0^{q_0} P(q) dq - p \cdot q_0$$

Annahme: Die Menge dq wird nur dann gekauft, falls $P(q) > p$.

Konsumentenrente KR



Angebotskurve und Kosten

Firma am Wettbewerbsmarkt mit Kostenfunktion c , wobei $c' > 0, c'' > 0$.

Gewinn: $\pi(q) = p \cdot q - c(q)$

Bedingung erster Ordnung:

$$\pi'(q) = p - c'(q) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow p = c'(q)$$

Diese Bedingung können wir als Mindestpreisbedingung für die Firma interpretieren:

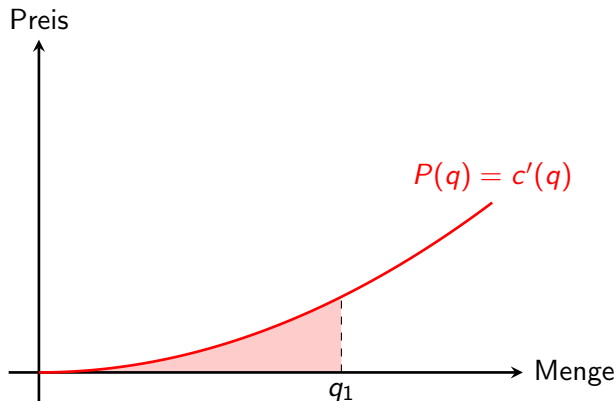
Biete die Menge q an, falls der Marktpreis mindestens den Grenzkosten bei der Menge entspricht.

Damit ist die inverse Angebotsfunktion für die Firma durch

$$P(q) = c'(q)$$

definiert.

Angebotskurve und Kosten



Fläche unter der Angebotskurve:

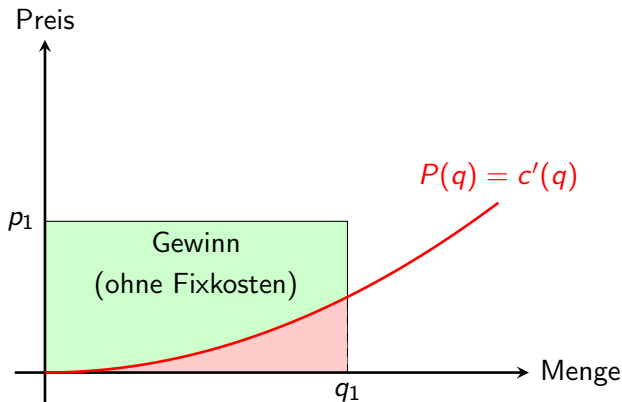
$$\int_0^{q_1} c'(q) dq = c(q_1) - c(0)$$

Produzentenrente PR

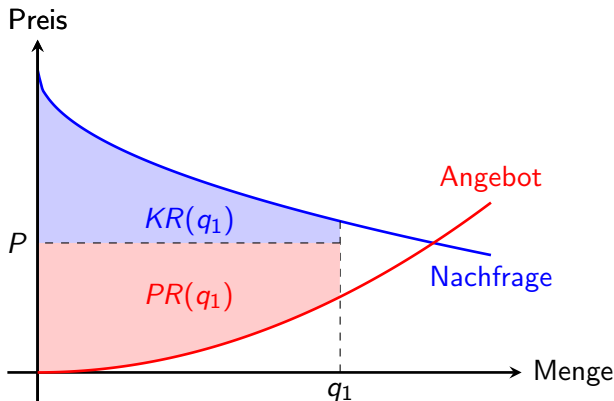
Die Firma biete q_1 Einheiten zum Preis p_1 an.

Erlös: $p_1 \cdot q_1$

Gewinn: $\pi(q_1) = p_1 \cdot q_1 - c(q_1)$



Wohlfahrt



Die Wohlfahrt wird gemessen durch

$$W(q_1) = KR(q_1) + PR(q_1) = \int_0^{q_1} (P_D(q) - P_S(q)) dq$$

10.5 Partielle Integration

Zur Wiederholung aus Kapitel 6:

Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Unbestimmtes Integral auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))' dx}_{f(x)g(x)} = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Formel der partiellen Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left| f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \right|_a^b$$

Wir benutzen die partielle Integration, wenn wir ein Produkt aus zwei Funktionen integrieren wollen, von denen die eine eine einfache Ableitung besitzt und die andere eine einfache Stammfunktion.

Beispiel 10.5.1 (partielle Integration)

$$\int x e^x dx$$

Hier hat der eine Faktor, x , eine einfache Ableitung (1) und der andere Faktor, e^x , eine einfache Stammfunktion (e^x).

Es gilt also:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} dx$$

Wahrscheinlichkeiten

Betrachte eine stetige Zufallsvariable, welche durch die **Dichtefunktion** f beschrieben wird.

Falls f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion F . Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert kleiner oder gleich x_1 annimmt, ist durch

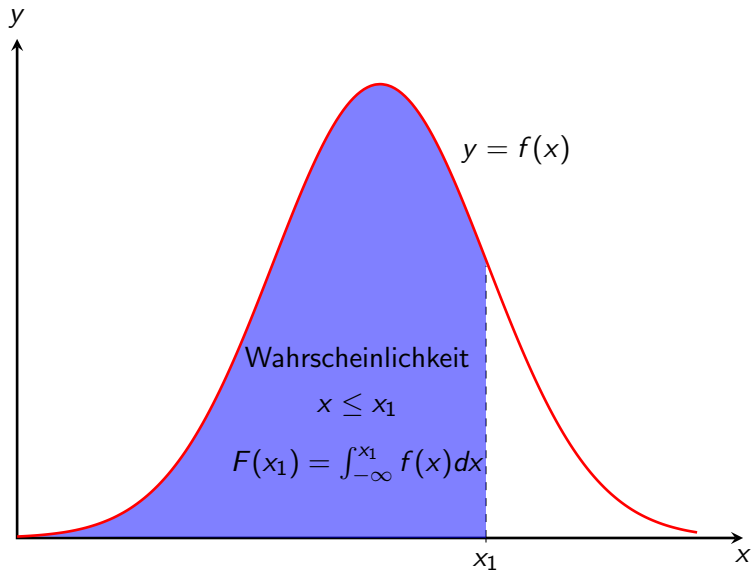
$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx$$

gegeben.

Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Wir nennen die Stammfunktion F auch **Verteilungsfunktion**.

Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeit



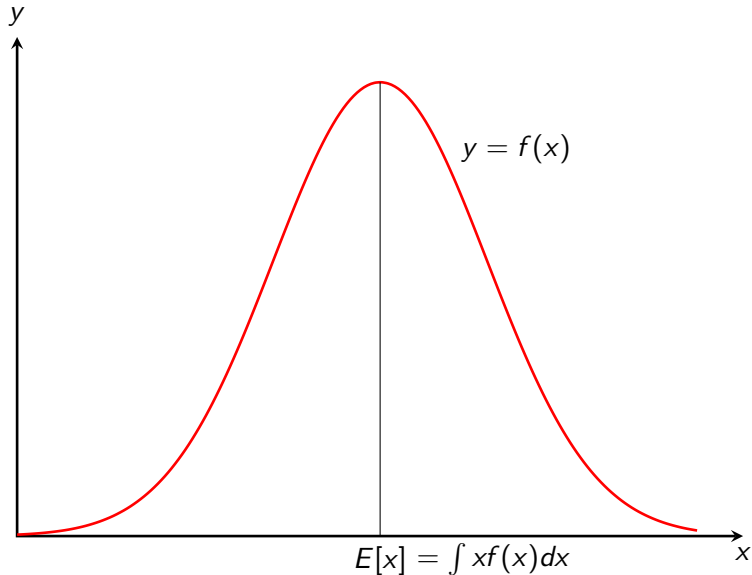
Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist der (theoretische) Durchschnittswert der Variablen bei unendlich vielen unabhängigen Ziehungen.

$$E[x] = \int x \cdot f(x) dx$$

Der Erwartungswert ist der „Gravitationspunkt“ der Dichtefunktion.

Erwartungswert



Zusammenfassung

- ▶ Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen: Notation
- ▶ Integrationsregeln
- ▶ Flächen und bestimmte Integrale
- ▶ Eigenschaften von bestimmten Integralen, Differenzierung
- ▶ Ökonomische Anwendungen
- ▶ Partielle Integration
- ▶ Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte