Vorlesung zu Kapitel 10:[1]

Integration

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Integralrechnung

Wir haben bisher das Ableiten kennengelernt:

Die Ableitung f' einer Funktion f ist die Steigung dieser Funktion.

In diesem Kapitel gehen wir den umgekehrten Weg:

Wir wollen für eine gegebene Funktion f wissen, von welcher Funktion F die Funktion f die Ableitung ist.

Integralrechnung

Wir nennen die „aufgeleitete“ Funktion F die **Stammfunktion** von f und den Vorgang, F zu bestimmen, **integrieren**.

Die Integralregeln sind den Ableitungsregeln sehr ähnlich, bloß „rückwärts“.

Geometrische Interpretation der Stammfunktion F:

Fläche unterhalb des Graphens von f.

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften:

- Maß für Handelsgewinne von Konsument:innen
- Maß für Kosten und Gewinne von Firmen
- Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
- ...

10.1 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Seien f und F stetige Funktionen und sei F differenzierbar.

Wenn f die Ableitung von F ist, so nennen wir F ein **unbestimmtes Integral** oder eine **Stammfunktion** von f und wir schreiben:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \ ,}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

$\int$: **Integralzeichen**
$f(x)$: **Integrand**
x: **Integrationsvariable** (gekennzeichnet durch dx)
C: **Integrationskonstante**

Einige wichtige Integrale

$f(x) = \underline{\underline{x^r}}$

Probe:

$\left(\frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + C\right)'$

$= (r+1) \frac{1}{r+1} x^r = \underline{\underline{x^r}}$

Wenn $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -1$, dann gilt:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

Beispiele:

$$\int x \; dx \quad =$$

$$\int \frac{1}{x^3} \; dx \quad =$$

$$\int \sqrt{x} \; dx \quad =$$

$$\int x^1 \, dx =$$

$r=1$ $\quad \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} + C = \frac{1}{2} x^2 + C$

$F(x) = \frac{1}{2} x^2$ $\qquad F(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$

$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{2} 2x = x$ ✓ $\qquad \frac{dF(x)}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2} x = x$ ✓

$$\int \boxed{\frac{1}{x^3}}\,dx = \int x^{-3}\,dx \qquad r$$

$$\frac{1}{-3+1}\,x^{-3+1} + C = \frac{1}{-2}\,x^{-2} + C = -\frac{1}{2}\,x^{-2} + C$$

Probe: $\left(-\frac{1}{2}x^{-2} + C\right)' = -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3} = x^{-3} = \boxed{\frac{1}{x^3}}$ ✓

$$\int \boxed{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

Probe: $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{x}}$ ✓

$r = -1$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int x^{-1}\, dx = \ln(x) + C$$

$$F(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{x} = f(x)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = f(x)\, dx$$

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C = \int dF(x)$$

Das Integrationszeichen $\int$

Summenzeichen

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

Das Integrationszeichen $\int$ ist aus dem langen s „ſ“ der Frakturschrift entstanden.

Der Buchstabe ſ steht für lat. summa und deutet darauf hin, dass ein Integral eigentlich eine Summe ist.

Grundlegende Integrationsregeln

Wie bei Summen gilt:

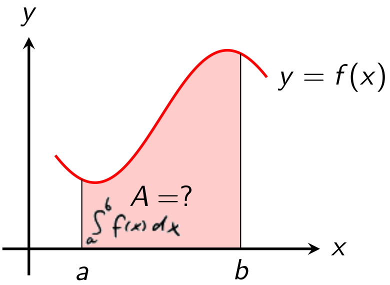
Ausklammern

$$\int af(x)\ dx = a\int f(x)\ dx, \text{ wobei } a \text{ eine Konstante ist}$$

$$\int (f(x)+g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

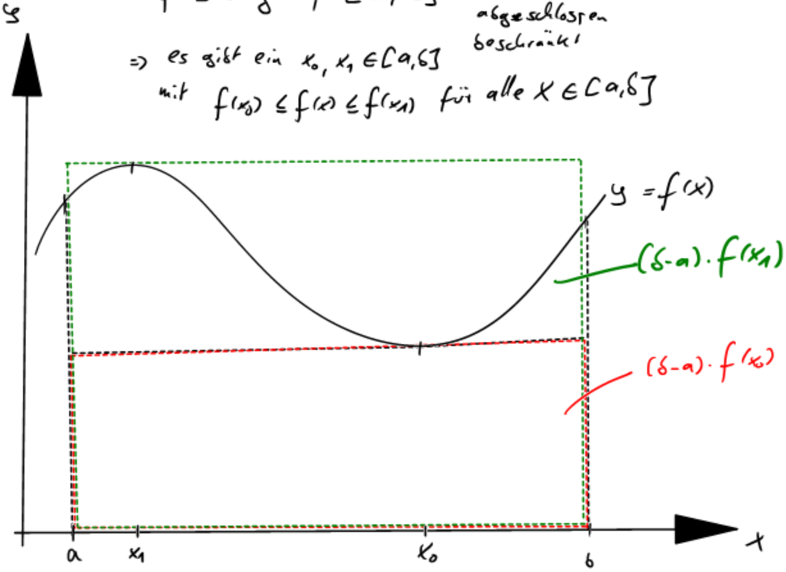
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Wie berechnen wir die Fläche A unter dem Graphen einer stetigen und nichtnegativen Funktion f über dem Intervall $[a, b]$?

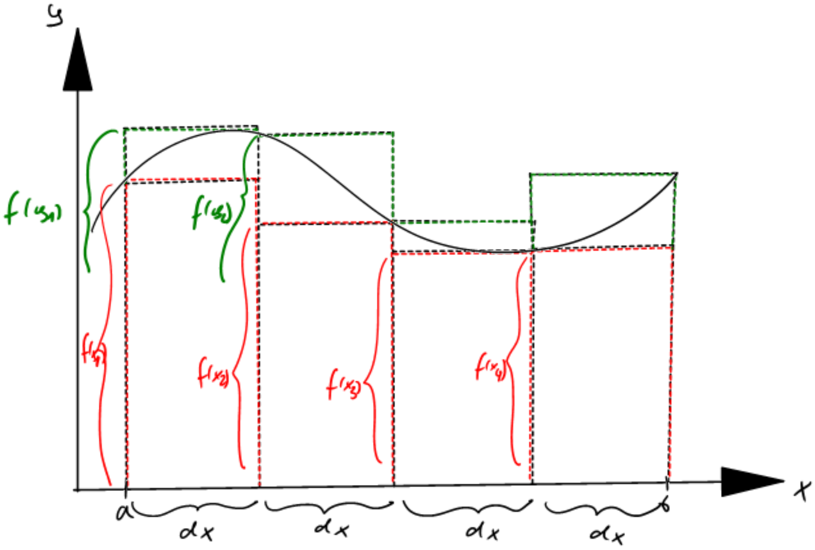


f stetig, $[a, b]$ nicht leer
abgeschlossen
beschränkt

$\Rightarrow$ es gibt ein $x_0, x_1 \in [a, b]$
mit $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ für alle $x \in [a, b]$



$(b-a) f(x_0) \leq$ Fläche unter dem Graphen von f $(= A)$ $\leq (b-a) f(x_1)$

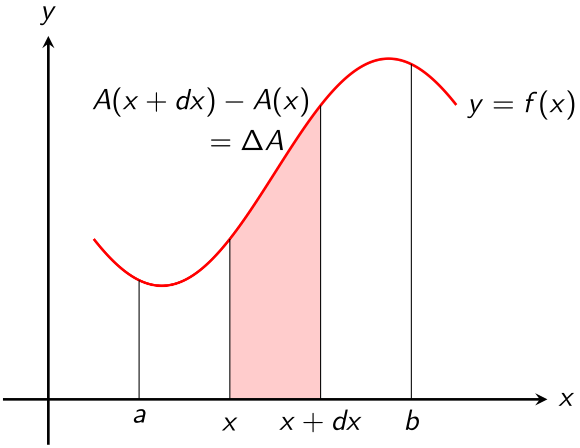


Untersumme $\leq$ Fläche A $\leq$ Obersumme

$\sum_{i=1}^{4} dx \cdot f(x_i)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} dx\, f(y_i)$

10.2 Flächen und bestimmte Integrale

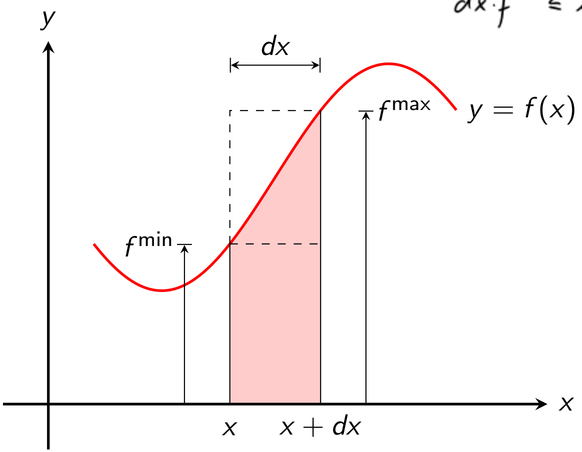
Zunächst: die Fläche des Teilintervalls $[x, x + dx]$



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Die Fläche ΔA zwischen $[x, x+dx]$ ist **mindestens** so groß wie $dx \cdot f^{\text{min}}$ und **höchstens** so groß wie $dx \cdot f^{\text{max}}$:

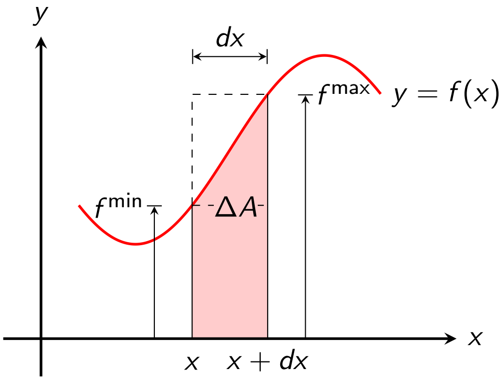
$$dx \cdot f^{\min} \leq \Delta A \leq dx\, f^{\max}$$



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Differenzenquotient

$$f^{\min} \cdot dx \leq \Delta A \leq f^{\max} \cdot dx \Leftrightarrow f^{\min} \leq \frac{A(x+dx) - A(x)}{dx} \leq f^{\max}$$



$\Delta A/dx \underset{dx\to 0}{\longrightarrow} f(x)$

Wir betrachten nun den Fall $dx \to 0$:

Es gilt:

$$\lim_{dx\to 0} f^{\min} = \lim_{dx\to 0} f^{\max} = f(x)$$

und:

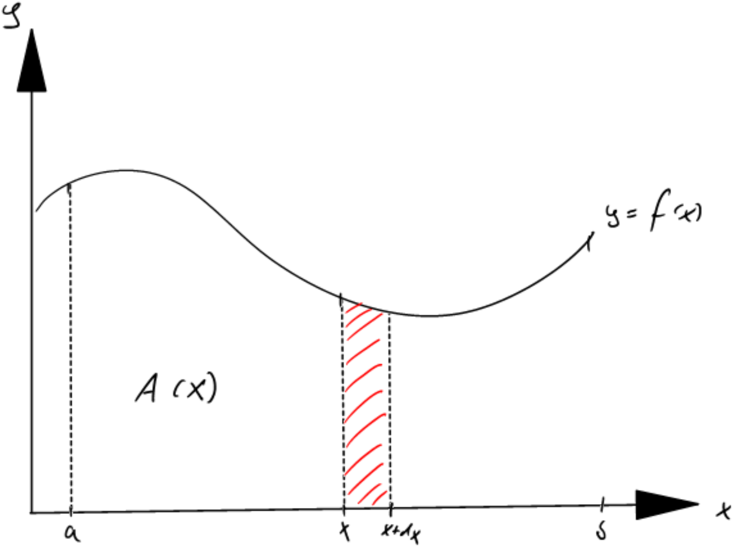
$$\lim_{dx\to 0} \frac{A(x+dx)-A(x)}{dx} = A'(x)$$

Wegen

$$f^{\min} \leq \frac{A(x+dx)-A(x)}{dx} \leq f^{\max} \underset{dx\to 0}{\Rightarrow} f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$$

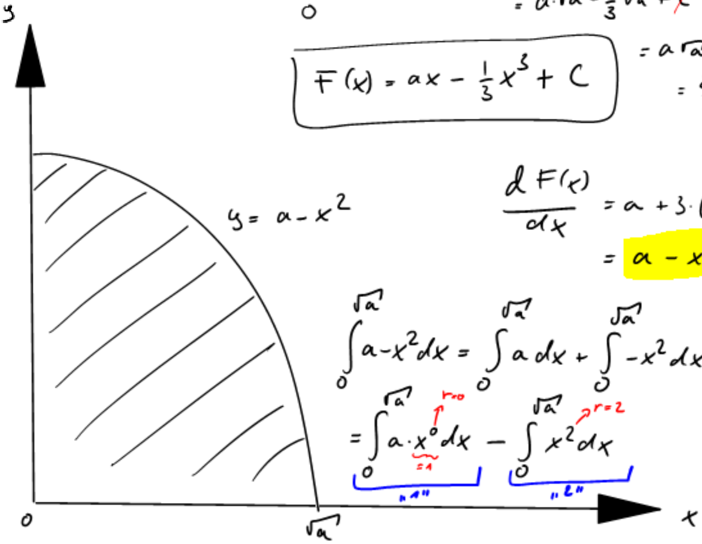
folgt:

$$A'(x) = f(x)$$



$$dx \to 0 \quad A'(x) = f(x)$$

Beispiel



$$\int_0^{\sqrt{a}} a - x^2 \, dx = F(\sqrt{a}) - F(0)$$

$$= a\cdot\sqrt{a} - \frac{1}{3}\sqrt{a}^3 + \cancel{C} - a\cdot 0 + \frac{1}{3}0^3 - \cancel{C}$$

$$= a\sqrt{a} - \frac{1}{3}a\sqrt{a}$$

$$= \frac{2}{3}a\cdot\sqrt{a}$$

$$\boxed{F(x) = ax - \frac{1}{3}x^3 + C}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = a + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^2$$

$$= a - x^2$$

$$\int_0^{\sqrt{a}} a - x^2 dx = \int_0^{\sqrt{a}} a\, dx + \int_0^{\sqrt{a}} -x^2 dx$$

$$= \underbrace{\int_0^{\sqrt{a}} a\cdot \underbrace{x^{\overset{r=0}{0}}}_{=1} dx}_{\text{„1"}} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{a}} x^{\overset{r=2}{2}} dx}_{\text{„2"}}$$

$$F_1(x) = \frac{1}{0+1} a x^{0+1} + C_1 = ax + C_1$$

$$F_2 = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C_2 = \frac{1}{3}x^3 + C_2$$

Fläche A als ein unbestimmtes Integral

Sei f eine stetige und nicht-negative Funktion.

Mit $A'(x) = f(x)$ gilt also

$$\int f(x)\;dx = \int A'(x)\;dx = A(x) = F(x) + C$$

Die Fläche A ist also ein unbestimmtes Integral der Funktion f.

Das bestimmte Integral

Sei f eine stetige Funktion und sei F die Stammfunktion von f.

Dann heißt die Differenz $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$.

Das bestimmte Integral bezeichnen wir mit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\; dx = \Big|_a^b F(x) \text{ oder } [F(x)]_a^b$$

Die Zahlen a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**.

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

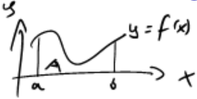
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$-\int_b^a f(x)dx = -\left(F(a) - F(b)\right)$
$= -F(a) + F(b)$

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $[a, c]$ $[c, b]$
  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $a < c < b$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

Differenzieren bezüglich der Integrationsgrenzen



$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{d\,(F(b) - F(a))}{db} = \frac{dF(b)}{db} - 0$$

Sei f eine stetige Funktion mit Stammfunktion F.

Dann gilt:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = F'(b) = f(b)\ .$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)dx = -F'(a) = -f(a)\ .$$

$$\frac{d\,(F(b) - F(a))}{da} = -\frac{dF(a)}{da} = -f(a)$$

10.4 Ökonomische Anwendungen

- Konsumentenrente
- Kosten
- Produzentenrente
- Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswerte

Konsumentenrente KR

Die inverse Nachfragefunktion $P(q)$ misst, welchen Reservationspreis die Konsument:innen für die nächste kleine Menge dq zu zahlen bereit sind, wenn bereits $q \geq 0$ Einheiten konsumiert werden.

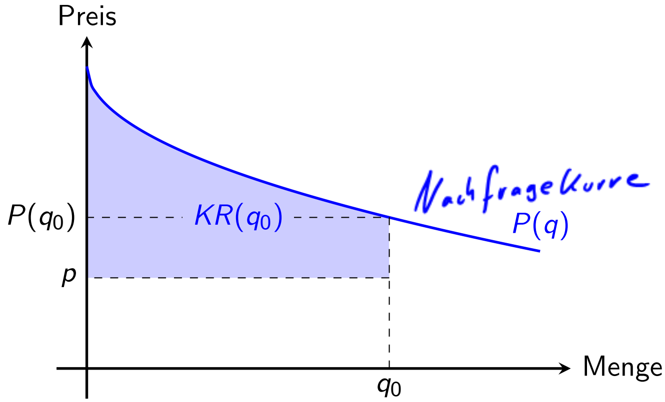
Wenn das gehandelte Gut für den Preis p gekauft werden kann, dann „gewinnen" die Konsument:innen ungefähr $(P(q) - p)\,dq$ durch den Kauf der nächsten kleinen Menge dq.

Die Summe dieser Handelsgewinne wird als Konsument:innenrente bezeichnet:

$$KR(q_0) = \int_0^{q_0} (P(q) - p)\,dq = \int_0^{q_0} P(q)dq - p \cdot q_0$$

Annahme: Die Menge dq wird nur dann gekauft, falls $P(q) > p$.

Konsumentenrente KR



Produzentenrente

Firma bietet bereits q_0 Einheiten an.

↳ q_0 wird produziert und verkauft.

Gewinn $\pi(q_0) = p \cdot q_0 - c(q_0)$

Wie hoch muss p sein, damit eine zusätzliche Einheit produziert und verkauft wird?

$$\pi(q_0+1) = p\cdot(q_0+1) - c(q_0+1)$$

$$\pi(q_0+1) \geq \pi(q_0)$$

$$\overbrace{p(q_0+1)}^{\cancel{pq_0}+p} - c(q_0+1) \geq \cancel{pq_0} - c(q_0)$$

$$p \geq \underbrace{c(q_0+1) - c(q_0)}_{\text{zusätzliche Kosten} \approx \text{Grenzkosten}}$$

Mindestpreis für die zusätzliche Einheit.

Angebotskurve und Kosten

Firma am Wettbewerbsmarkt mit Kostenfunktion c, wobei $c' > 0, c'' > 0$.

Gewinn: $\pi(q) = p \cdot q - c(q)$

Bedingung erster Ordnung:

$$\pi'(q) = p - c'(q) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow p = c'(q)$$

Diese Bedingung können wir als Mindestpreisbedingung für die Firma interpretieren:

Biete die Menge q an, falls der Marktpreis mindestens den Grenzkosten bei der Menge entspricht.

Damit ist die inverse Angebotsfunktion für die Firma durch

$$P(q) = c'(q)$$

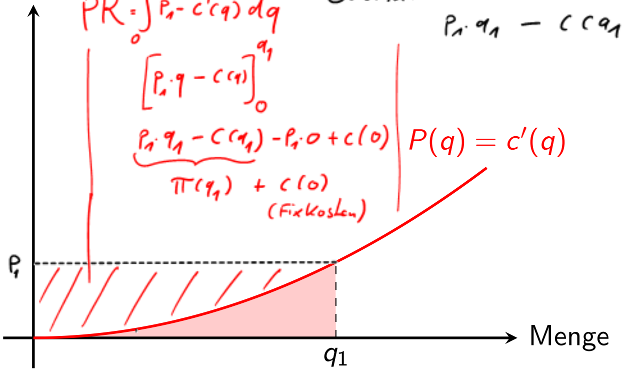
definiert.

Angebotskurve und Kosten

Erlös: $P_1 \cdot q_1$

Gewinn: Erlös − Kosten

$P_1 \cdot q_1 - c(q_1)$



$PR = \int_0^{q_1} P_1 - c'(q)\,dq$

$\left[P_1 \cdot q - c(q)\right]_0^{q_1}$

$\underbrace{P_1 \cdot q_1 - c(q_1)}_{\pi(q_1)} - P_1 \cdot 0 + c(0)$

$\pi(q_1) + c(0)$

(Fixkosten)

Fläche unter der Angebotskurve:

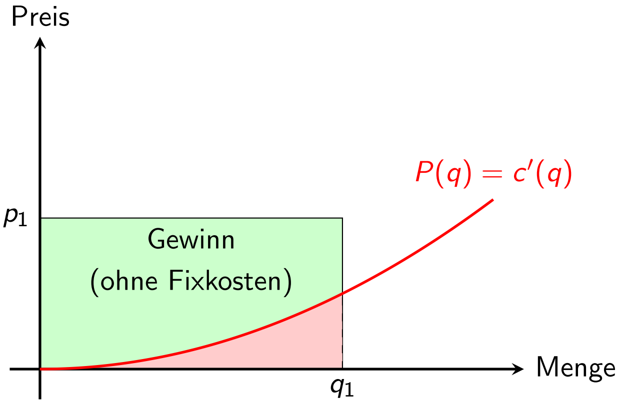
$$\int_0^{q_1} c'(q)dq = c(q_1) - \underbrace{c(0)}_{\text{Fixkosten}}$$

Produzentenrente PR

Die Firma biete q_1 Einheiten zum Preis p_1 an.

Erlös: $p_1 \cdot q_1$

Gewinn: $\pi(q_1) = p_1 \cdot q_1 - c(q_1)$



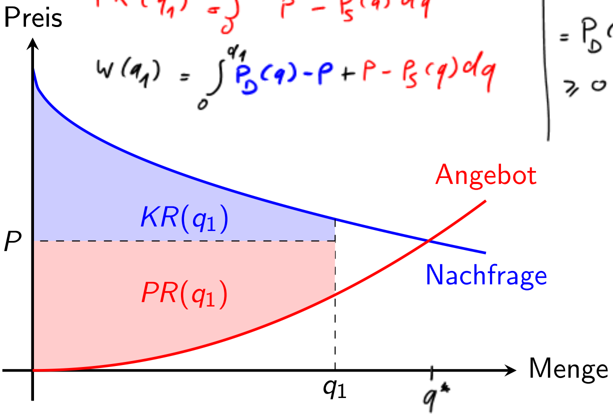
Wohlfahrt

$$KR(q_1) = \int_0^{q_1} P_D(q) - P \, dq$$

$$PR(q_1) = \int_0^{q_1} P - P_S(q) \, dq$$

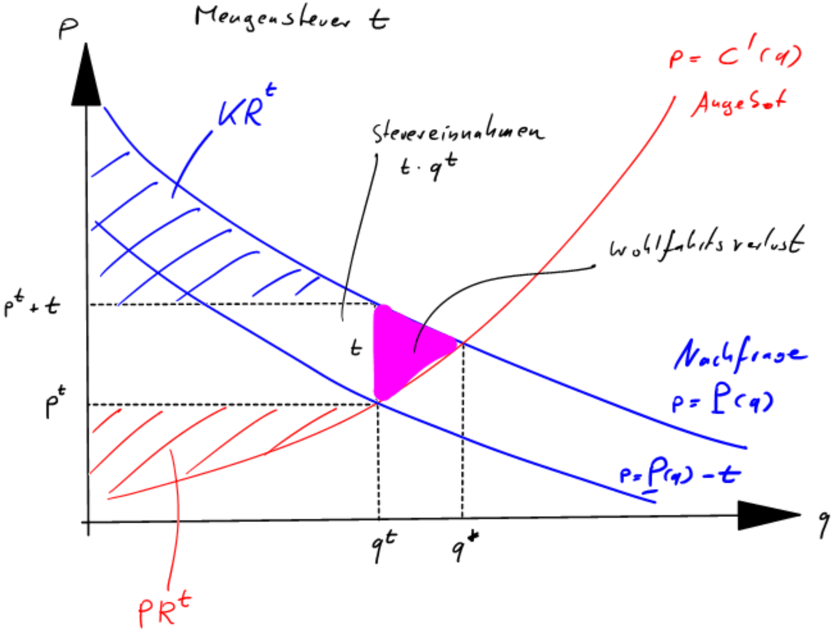
$$W(q_1) = \int_0^{q_1} P_D(q) - P + P - P_S(q) \, dq$$

$$\frac{dW(q_1)}{dq_1} = P_D(q_1) - P_S(q_1) \geq 0 \iff q_1 \leq q^*$$



Die Wohlfahrt wird gemessen durch

$$W(q_1) = KR(q_1) + PR(q_1) = \int_0^{q_1} (P_D(q) - P_S(q)) \, dq$$



Mengensteuer t
p
KR^t
Steuereinnahmen
$t \cdot q^t$
$p = C'(q)$
Angebot
Wohlfahrtsverlust
$p^t + t$
t
p^t
Nachfrage
$p = P(q)$
$p = P(q) - t$
q
q^t
q^*
PR^t

10.5 Partielle Integration

Zur Wiederholung aus Kapitel 6:

Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Unbestimmtes Integral auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))'\,dx}_{f(x)g(x)} = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Formel der partiellen Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Wir benutzen die partielle Integration, wenn wir ein Produkt aus zwei Funktionen integrieren wollen, von denen die eine eine einfache Ableitung besitzt und die andere eine einfache Stammfunktion.

$$\int \underset{g' \quad f}{\overset{f \quad g'}{\underline{x \cdot e^x}}} \, dx =$$

$$x \xrightarrow{\frac{dx}{dx}} 1$$

$$x \xrightarrow{\int x\,dx} \tfrac{1}{2}x^2$$

$$\overset{f \cdot g}{e^x \tfrac{1}{2}x^2} - \int \overset{g \cdot f'}{\tfrac{1}{2}x^2 e^x}$$

Lösung ist noch komplizierter

$$e^x \xrightarrow{\frac{de^x}{dx}} e^x$$

$$e^x \xrightarrow{\int e^x dx} e^x$$

$$\overset{f \cdot g}{x \cdot e^x} - \int \overset{f' \cdot g}{1 \cdot e^x} \, dx$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x$$

$$= e^x(x-1)$$

Probe

$$\left(e^x(x-1)\right)' = e^x(x-1) + e^x \cdot 1$$

$$= e^x x - e^x + e^x$$

$$= \underline{\underline{e^x \cdot x}}$$

Beispiel 10.5.1 (partielle Integration)

$$\int xe^x dx$$

Hier hat der eine Faktor, x, eine einfache Ableitung (1) und der andere Faktor, e^x, eine einfache Stammfunktion (e^x).

Es gilt also:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)} dx = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{e^x}_{g(x)} dx$$

Wahrscheinlichkeiten

Betrachte eine stetige Zufallsvariable, welche durch die **Dichtefunktion** f beschrieben wird.

Falls f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion F. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert kleiner oder gleich x_1 annimmt, ist durch

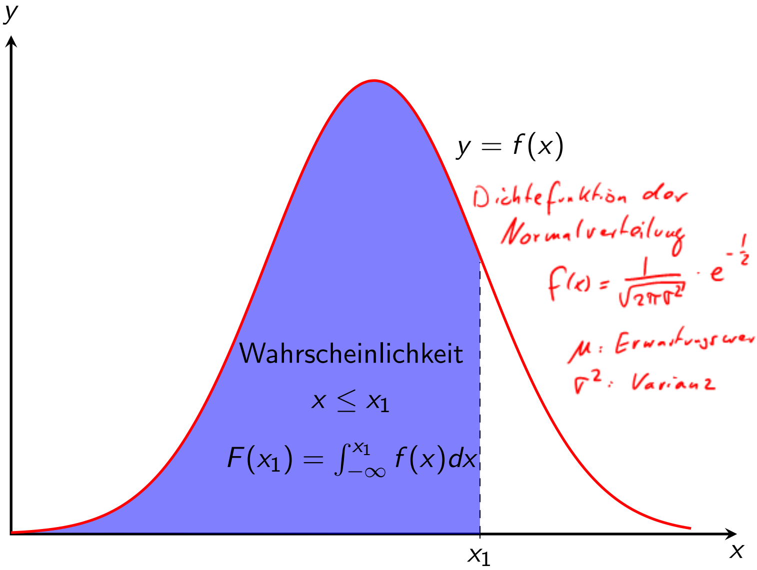
$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

gegeben.

Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Wir nennen die Stammfunktion F auch **Verteilungsfunktion**.

Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeit



Dichtefunktion der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

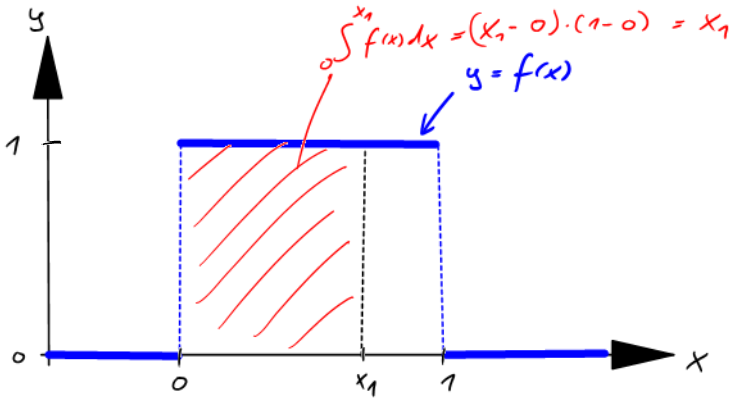
μ: Erwartungswert

σ^2: Varianz

Uniformverteilung $\quad X \overset{U}{\sim} [0,1]$

Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$



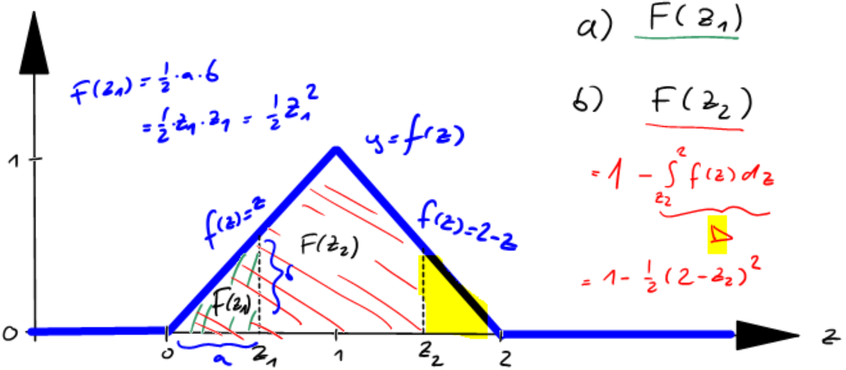
$X, Y \overset{\cup}{\sim} [0,1] \qquad Z = X + Y$

$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2}(2-z_2)^2$

$\left.\begin{array}{l} a = 2 - z_2 \\ b = 2 - z_2 \end{array}\right\}$

Dichte von Z:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z < 0 \\ z & \text{falls } 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z & \text{falls } 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{falls } z > 2 \end{cases}$$



$F(z_1) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

$= \frac{1}{2} z_1 \cdot z_1 = \frac{1}{2} z_1^2$

a) $F(z_1)$

b) $F(z_2)$

$= 1 - \underbrace{\int_{z_2}^{2} f(z)\, dz}_{\triangle}$

$= 1 - \frac{1}{2}(2 - z_2)^2$

$$\int_0^{z_1} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{z_1} = \frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}z_1^2 = F(z_1)$$

$$\int_0^{z_2} f(z)\,dz = \int_0^{1} f(z)\,dz + \int_1^{z_2} f(z)\,dz$$

$$= \int_0^{1} z\,dz + \int_1^{z_2} 2-z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{1} + 2\cdot z - \frac{1}{2}z^2\Big|_1^{z_2}$$

$$= \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 + 2z_2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \left(2\cdot 1 - \frac{1}{2}1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2z_2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}z_2^2 + 2z_2 - 1 = F(z_2)$$

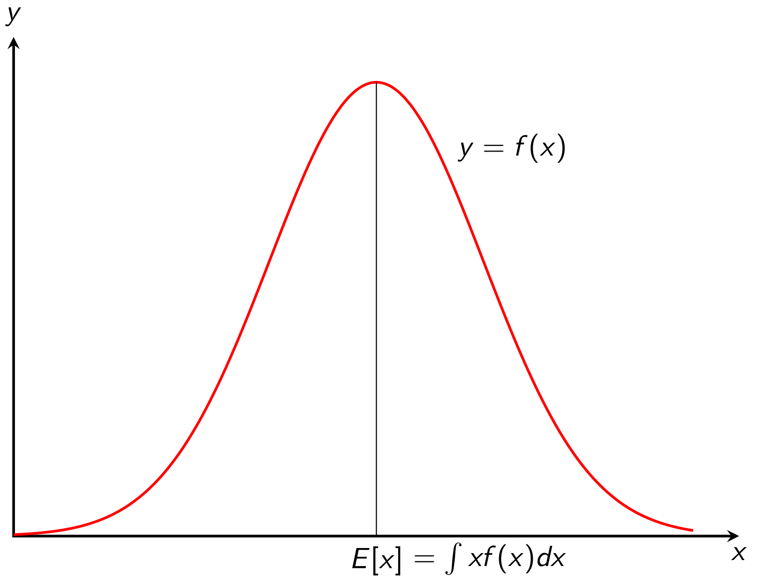
Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen ist der (theoretische) Durchschnittswert der Variablen bei unendlich vielen unabhängigen Ziehungen.

$$E[x] = \int x \cdot f(x)dx$$

Der Erwartungswert ist der „Gravitationspunkt“ der Dichtefunktion.

Erwartungswert



Für

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{falls } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_1^2 x \cdot f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{x \cdot x}_{x^2}\,dx + \int_1^2 \underbrace{x \cdot (2-x)}_{2x - x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 + 2^2 - \frac{1}{3}2^3 - \left(1^2 - \frac{1}{3}1^3\right) = \frac{1}{3} + 4 - \frac{1}{3}8 - 1 + \frac{1}{3}$$

$$= 3 - \frac{6}{3} = 3 - 2 = 1$$

Zusammenfassung

- Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen: Notation
- Integrationsregeln
- Flächen und bestimmte Integrale
- Eigenschaften von bestimmten Integralen, Differenzierung
- Ökonomische Anwendungen
- Partielle Integration
- Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte