

Optimierung



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

9.1 Extremstellen

9.2 Einfache Tests auf Extremstellen

9.3 Ökonomische Beispiele

9.4 Der Extremwertsatz

9.5 Weiteres ökonomisches Beispiel

9.6 Lokale Extremstellen

9.1 Extremstellen

Sei f eine Funktion. Dann ist

- ▶ c eine **Maximalstelle** für f und $f(c)$ ist der **Maximumwert**, wenn

$$f(x) \leq f(c) \text{ für alle } x$$

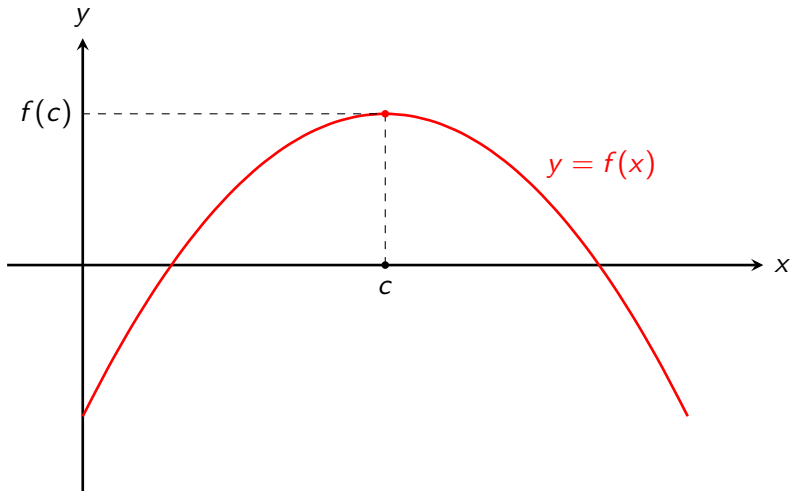
- ▶ d eine **Minimalstelle** für f und $f(d)$ ist der **Minimumwert**, wenn

$$f(x) \geq f(d) \text{ für alle } x$$

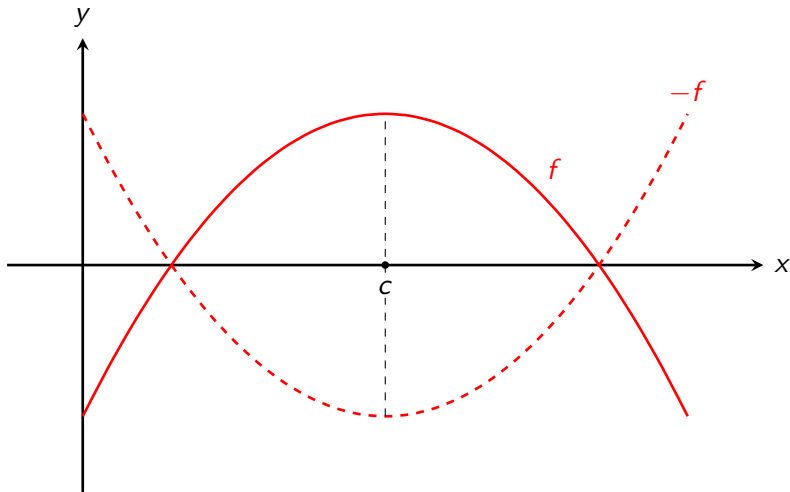
Sind die Ungleichungen strikt für alle $x \neq c$ bzw. $x \neq d$, so heißen c und d strikte Maximal- und Minimalstelle.

Die kollektive Bezeichnung lautet **Extremstelle**.

Maximalstelle c , Maximalwert $f(c)$



Maximum von $f = \text{Minimum von } -f$



Bedingungen für innere Extrempunkte

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a, b)$.

Behauptung: x_0 kann **keine** Maximumstelle von f sein!

Notwendige Bedingung erster Ordnung

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Falls $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a, b)$:

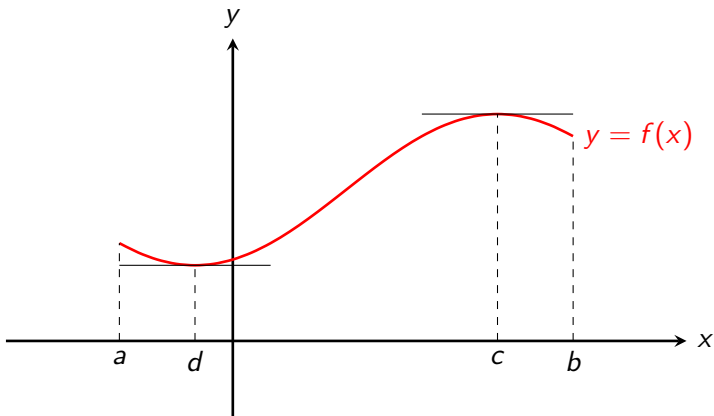
- ▶ x_0 kann keine Maximumstelle von f sein.
- ▶ x_0 kann keine Minimumstelle von f sein. (Begründung analog)

Damit $x_0 \in (a, b)$ eine Extremstelle für f in (a, b) ist, ist es eine **notwendige Bedingung**, dass die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich null ist:

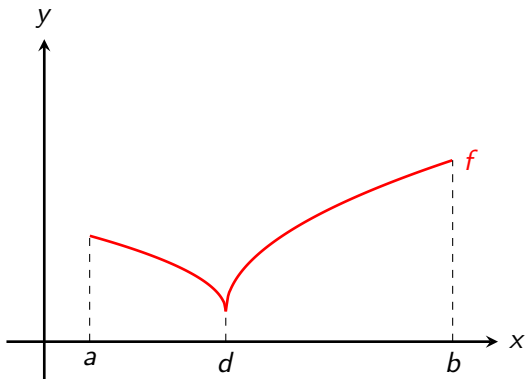
$$f'(x_0) = 0 .$$

Wir nennen Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ auch **stationäre** oder **kritische** Stellen.

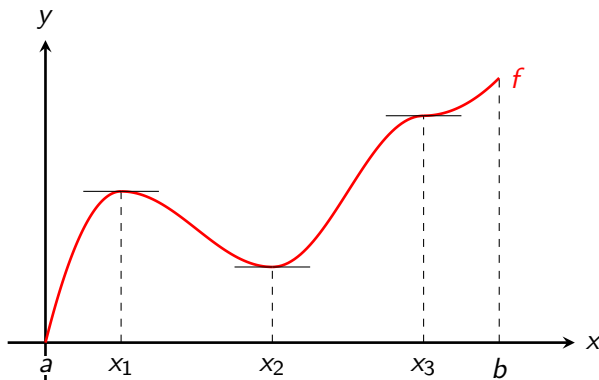
Zwei stationäre Stellen



Keine stationäre Stelle

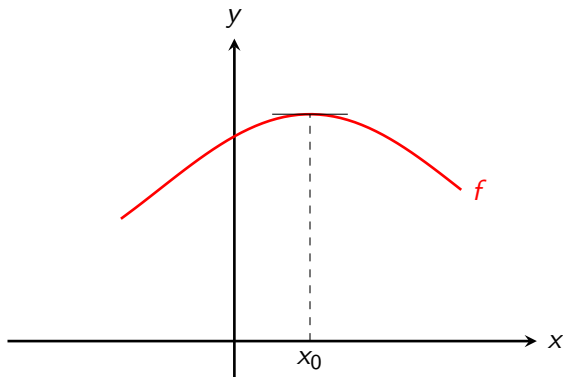


Keine inneren Extrema



Wenn x stationär ist, können wir nicht schlussfolgern, dass x eine Extremstelle von f ist!

9.2 Einfache Tests auf eine Maximumstelle

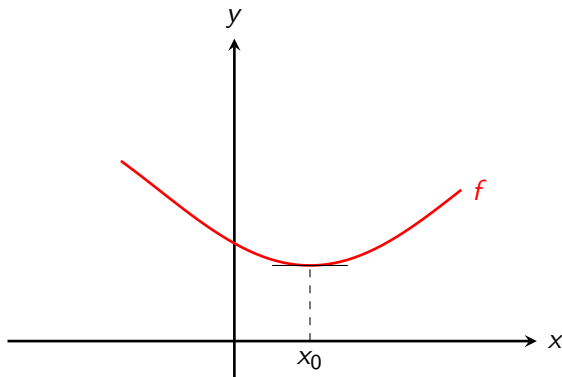


$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \leq x_0$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \geq x_0$$

$$\text{Also: } f'(x)(x - x_0) \leq 0 \text{ für alle } x$$

9.2 Einfache Tests auf eine Minimumstelle



$$f'(x) \leq 0 \text{ für alle } x \leq x_0$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \geq x_0$$

$$\text{Also: } f'(x)(x - x_0) \geq 0 \text{ für alle } x$$

9.2 Einfache Tests auf Extremstellen

Test der ersten Ableitung auf Extrema

Sei f differenzierbar.

- (i) Falls $f'(x)(x - x_0) \leq 0$ für alle x :
 x_0 ist eine Maximumstelle für f .
- (ii) Falls $f'(x)(x - x_0) \geq 0$ für alle x :
 x_0 ist eine Minimumstelle für f .

Falls die Ungleichung strikt ist für alle $x \neq x_0$, handelt es sich um eine strikte Extremstelle.

Extrema von konkaven und konvexen Funktionen

Sei x_0 eine stationäre Stelle für f .

- (i) Wenn f konkav ist, dann ist x_0 eine Maximumstelle für f .
- (ii) Wenn f konvex ist, dann ist x_0 eine Minimumstelle für f .

Extrema von strikt konkaven und strikt konvexen Funktionen

- (i) Wenn f strikt konkav ist, dann ist eine Maximumstelle für f eindeutig.
- (ii) Wenn f strikt konvex ist, dann ist eine Minimumstelle für f eindeutig.

9.3 Ökonomische Beispiele

Gewinnmaximierung im perfekten Wettbewerb

Marktpreise:

- ▶ $w = \frac{1}{2}$ für das Input (Menge $x \geq 0$)
- ▶ $p = 10$ für das Output (Menge $y \geq 0$)

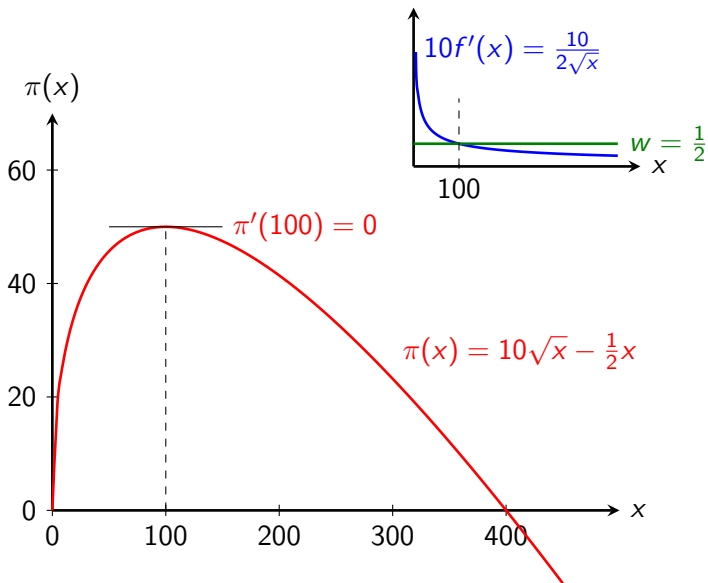
Produktionsfunktion:

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

Gewinn als Funktion der Inputmenge x :

$$\pi(x) = p \cdot y - w \cdot x = 10\sqrt{x} - \frac{1}{2}x$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$, $p = 10$, $w = \frac{1}{2}$



9.3 Ökonomische Beispiele

Monopolist mit konstanten Grenzkosten

- ▶ inverse Nachfragefunktion P
 - ▶ zweimal differenzierbar
 - ▶ streng monoton fallend
 - ▶ streng konkav
- ▶ $y \geq 0$: Menge des produzierten Outputs
- ▶ Kostenfunktion $C(y) = c \cdot y$
- ▶ Gewinn als Funktion der Outputmenge y :
$$\pi(y) = P(y) \cdot y - c \cdot y$$

Annahme: $y^* > 0$ Maximalstelle von π

Wie lautet die notwendige Bedingung erster Ordnung?

Wie reagiert die optimale Menge y^* auf eine Veränderung von c ?

Wie reagiert das Gewinnmaximum auf eine Veränderung von c ?

9.3 Ökonomische Beispiele

Belindas optimale Konsumentscheidung

Belinda konsumiert Baguette (Menge $x \geq 0$) und Rotwein ($y \geq 0$).

Ihr Nutzen aus dem Güterbündel (x, y) beträgt $u(x, y) = \frac{1}{4}x^2y$.

Da die Summe aus Baguette und Rotwein 3 sein muss ($x + y = 3$), gilt $y = 3 - x$.

Ihr Nutzen aus dem Güterbündel $(x, 3 - x)$ beträgt also:

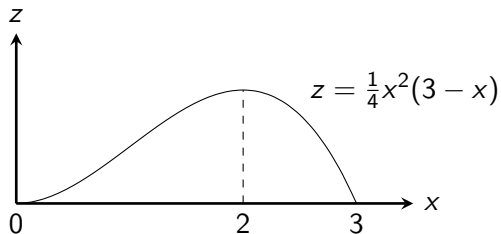
$$u(x) = \frac{1}{4}x^2(3 - x)$$

Der Definitionsbereich lautet $[0, 3]$ (es muss $0 \leq x \leq 3$ gelten).

Welche Mengen x^* und y^* sind optimal für Belinda?

9.3 Ökonomische Beispiele

Belindas optimale Konsumentscheidung



9.3 Ökonomische Beispiele

Celestes optimale Konsumentscheidung

Celeste konsumiert Baguette (Menge $x \geq 0$) und Rotwein ($y \geq 0$).

Ihr Nutzen aus dem Güterbündel (x, y) beträgt

$$u(x, y) = \min \left\{ \frac{1}{4}x^2, y \right\}.$$

Da die Summe aus Baguette und Rotwein 3 sein muss ($x + y = 3$), gilt $y = 3 - x$.

Ihr Nutzen aus dem Güterbündel $(x, 3 - x)$ beträgt also:

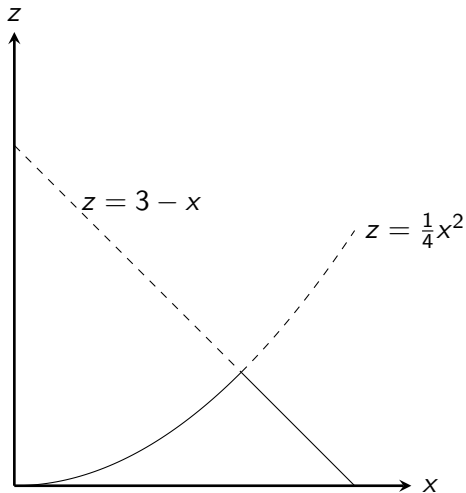
$$u(x) = \min \left\{ \frac{1}{4}x^2, 3 - x \right\}$$

Der Definitionsbereich lautet $[0, 3]$ (es muss $0 \leq x \leq 3$ gelten).

Welche Mengen x^* und y^* sind optimal für Celeste?

9.3 Ökonomische Beispiele

Celestes optimale Konsumentscheidung



9.3 Ökonomische Beispiele

Doras optimale Konsumententscheidung

Dora konsumiert Baguette (Menge $x \geq 0$) und Rotwein ($y \geq 0$).

Ihr Nutzen aus dem Güterbündel (x, y) beträgt $u(x, y) = \frac{1}{4}x + y$.

Da die Summe aus Baguette und Rotwein 3 sein muss ($x + y = 3$), gilt $y = 3 - x$.

Ihr Nutzen aus dem Güterbündel $(x, 3 - x)$ beträgt also:

$$u(x) = \frac{1}{4}x + 3 - x$$

Der Definitionsbereich lautet $[0, 3]$ (es muss $0 \leq x \leq 3$ gelten).

Welche Mengen x^* und y^* sind optimal für Dora?

9.4 Der Extremwertsatz

Es sei angenommen, dass f eine **stetige** Funktion auf einem **abgeschlossenen** und **beschränkten** Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist.

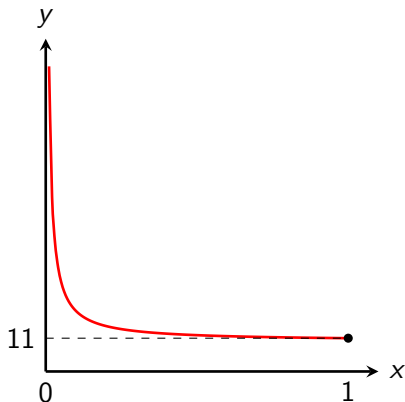
Dann existiert eine Stelle $d \in [a, b]$, an der f ein Minimum hat und eine Stelle $c \in [a, b]$, an der f ein Maximum hat, d.h. es gilt:

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in [a, b]$$

Sind stetig, abgeschlossen oder beschränkt nicht erfüllt, können Extremstellen existieren, müssen es aber nicht.

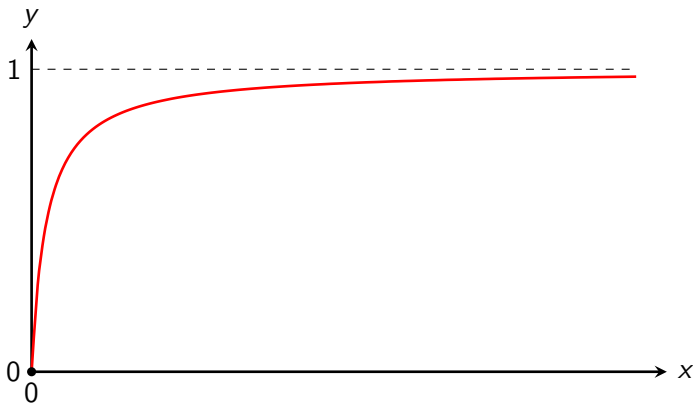
Warum gibt es hier kein Maximum?

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x} + 10$$

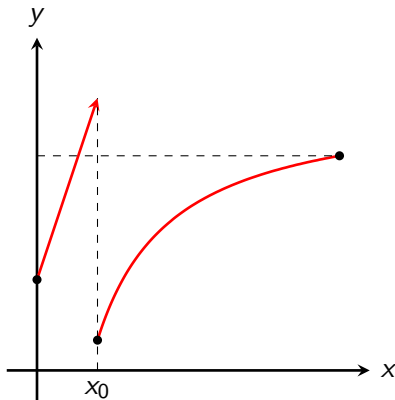


Warum gibt es hier kein Maximum?

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{x}{x+1}$$

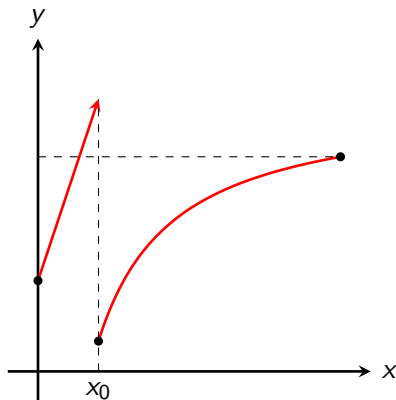


Warum gibt es hier kein Maximum?



Warum gibt es hier kein Maximum?

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$



Wie nach Extremstellen gesucht wird

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei der Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei.

Jede Extremstelle des Intervalls D gehört zu einer der drei verschiedenen Mengen:

- (a) Innere Punkte von D , in denen $f'(x) = 0$ ist;
- (b) Endpunkte von D , falls sie zu D gehören; und
- (c) Innere Punkte von D , in denen f' nicht existiert.

Punkte, die zu (a), (b) oder (c) gehören, heißen **Kandidaten für Extremstellen**.

Auffinden der Extrema von differenzierbaren Funktionen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Um die Extremwerte von f zu finden, gehe wie folgt vor:

1. Bestimme alle stationären Stellen von f in (a, b) , d.h. bestimme alle $x \in (a, b)$, die die Gleichung $f'(x) = 0$ erfüllen.
2. Berechne den Funktionswert von f in den Endpunkten a und b des Intervalls und auch an allen stationären Stellen.
3. Der größte der in 1. und 2. gefundenen Funktionswerte ist der Maximalwert und der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in $[a, b]$.

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

9.5 Weiteres ökonomisches Beispiel

Monopolfirma mit Kapazitätsgrenze

Eine Monopolfirma sehe sich der inversen Nachfragefunktion

$$P(y) = \max\{100 - y, 0\}$$

bei gegebener Outputmenge $y \geq 0$ gegenüber.

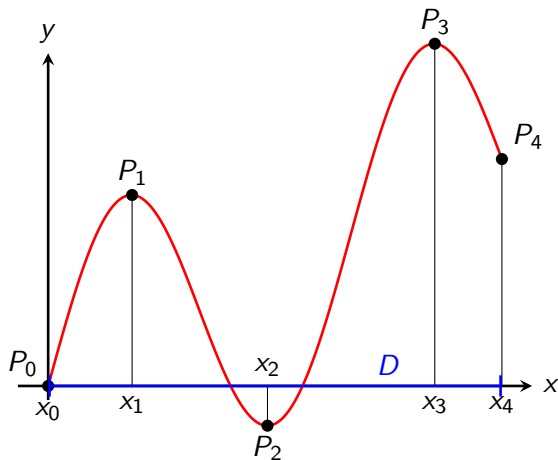
Sie habe die Kostenfunktion $C(y) = 20 \cdot y$.

Außerdem sei die Kapazitätsgrenze $0 < K < 100$ gegeben.

Der Gewinn der Firma beträgt

$$\pi(y) = (100 - y) \cdot y - 20 \cdot y \text{ für } 0 \leq y \leq K$$

9.6 Lokale Extremstellen



Lokales Maximum

Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich $[a, b]$.

Ein **innerer Punkt** $x_0 \in (a, b)$ ist ein lokales Maximum von f , falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $a < x_0 - \epsilon$ und $x_0 + \epsilon < b$ und

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

Der **Randpunkt** $x_0 = a$ ist ein lokales Maximum von f , falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $a + \epsilon < b$ und

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in [a, a + \epsilon)$$

Der **Randpunkt** $x_0 = b$ ist ein lokales Maximum von f , falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $a < b - \epsilon$ und

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in (b - \epsilon, b]$$

Lokale Extrema

Ein **lokales Minimum** x_0 ist analog definiert:

Es muss jeweils $f(x) \geq f(x_0)$ gelten.

Kollektive Namen für lokale Maxima bzw. lokale Minima lauten
lokale Extremstellen bzw. **lokale Extrema**

Auch für lokale Extrema gilt:

In einer lokalen Extremstelle im Innern des Definitionsbereiches einer differenzierbaren Funktion muss die Ableitung Null sein.

Der Test der ersten Ableitung

Sei f differenzierbar mit Definitionsbereich D .

Nehme an, dass x_0 ein innerer Punkt von D ist und eine stationäre Stelle von f .

- (i) Falls $f'(x)(x - x_0) \leq 0$ auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$,
dann ist x_0 eine lokale Maximumstelle für f .
- (ii) Falls $f'(x)(x - x_0) \geq 0$ auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$,
dann ist x_0 eine lokale Minimumstelle für f .
- (iii) Falls $f'(x) > 0$ auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ (außer für $x = x_0$) oder
falls $f'(x) < 0$ auf $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ (außer für $x = x_0$),
dann ist x_0 keine lokale Extremstelle für f .

Der Test der zweiten Ableitung

Sei f zweimal zweimal differenzierbar.

Nehme an, dass x_0 eine stationäre Stelle von f ist.

- (i) Wenn $f''(x_0) < 0$,
dann ist x_0 eine strikte lokale Maximumstelle.
- (ii) Wenn $f''(x_0) > 0$,
dann ist x_0 eine strikte lokale Minimumstelle.
- (iii) Wenn $f''(x_0) = 0$,
dann bleibt der Charakter von x_0 unbestimmt.

Der Umkehrschluss dieser Aussagen liefert die notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung.

Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung

Sei f zweimal differenzierbar.

Dann gilt:

x_0 ist eine lokale Maximumstelle für $f \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

x_0 ist eine lokale Minimumstelle für $f \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

Zusammenfassung

- ▶ Extremstellen: Maximal- & Minimalstellen
- ▶ Notwendige Bedingung erster Ordnung für innere Extremstellen
- ▶ Extremwertsatz
- ▶ Lokale Extremstellen
- ▶ Notwendige Bedingung zweiter Ordnung