

Konkave und konvexe Funktionen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

8.1 Intuition

8.2 Definitionen

8.3 Allgemeine Eigenschaften

8.4 Tests der ersten Ableitung

8.5 Tests der zweiten Ableitung

8.6 Wendestellen

8.1 Intuition: Wäscheleine am Höhleneingang



8.1 Intuition: Seilbrücke über Bach



8.2 Definition Konvexkombination

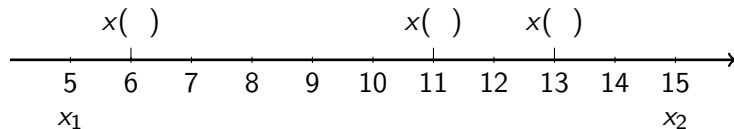
Für zwei beliebige Zahlen x_1 und x_2 ist für λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$x(\lambda) = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$$

eine **Konvexkombination** von x_1 und x_2 .

Beispiel:

$$x(\lambda) = \lambda \cdot 5 + (1 - \lambda) \cdot 15$$

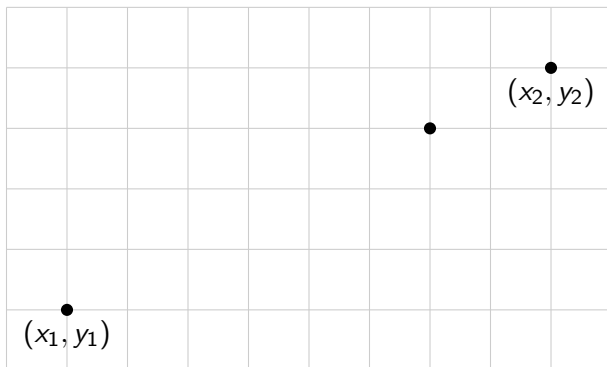


Konvexkombinationen von Punkten

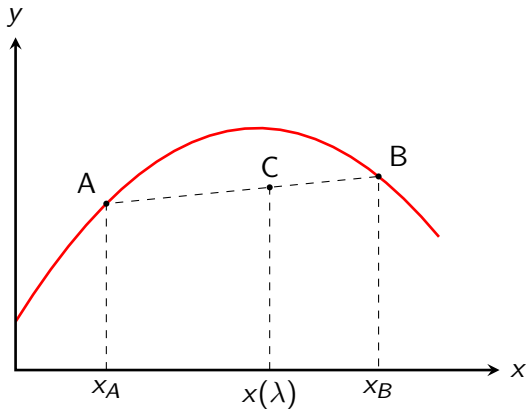
Für zwei beliebige Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist für λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(x(\lambda), y(\lambda)) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2, y_2)$$

eine Konvexkombinationen dieser beiden Punkte.



Mit der Konvexkombination von Punkten können wir nun die „Wäscheleine“ als Formel darstellen:



$$C = \lambda \cdot A + (1 - \lambda) \cdot B$$

8.2 Definition konkave Funktion

Eine Funktion f heißt **konkav** auf dem Intervall $[a, b]$, falls

$$f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) \geq \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(b)$$

für alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

Wenn die Ungleichung für $0 < \lambda < 1$ strikt ist, dann ist f **strikt konkav**.

8.2 Definition konvexe Funktion

Eine Funktion f heißt **konvex** auf dem Intervall $[a, b]$, falls

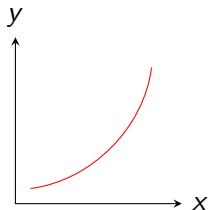
$$f(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) \leq \lambda \cdot f(a) + (1 - \lambda) \cdot f(b)$$

für alle Zahlen $\lambda \in [0, 1]$.

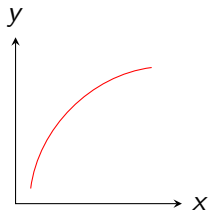
Wenn die Ungleichung für $0 < \lambda < 1$ strikt ist, dann ist f **strikt konvex**.

Anmerkung: Falls f konvex ist, so ist $-f$ konkav.

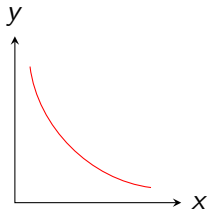
Monotonie und Krümmung



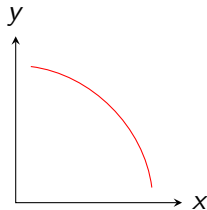
wachsend, konvex



wachsend, konkav



fallend, konvex



fallend, konkav

8.3 Allgemeine Eigenschaften

Wir präsentieren in diesem Abschnitt allgemeine Eigenschaften konkaver Funktionen. Mit der Regel

$$f \text{ konkav} \Leftrightarrow -f \text{ konvex}$$

Lassen sich diese Eigenschaften leicht für konvexe Funktionen anwenden.

Summen

Sind die Funktionen f und g konkav, so ist $f + g$ ebenfalls konkav.

Ist hierbei f oder g strikt konkav, so ist $f + g$ strikt konkav.

Beispiel:

Ist $f(x) = x^2 - 2x + 2$ konkav, konvex, oder weder noch?

Minima und Maxima

Sind die Funktionen f und g konkav, so ist $\min\{f, g\}$ ebenfalls konkav.

Dies ist äquivalent zu:

Sind die Funktionen f und g konvex, so ist $\max\{f, g\}$ ebenfalls konvex.

Übung:

$f(x) = 2 - x$ und sei $g(x) = -2 + x$.

Ist $\max\{f, g\}$ konkav, konvex oder weder noch?

Ist $h(x) = |x - 2|$ konkav, konvex, oder weder noch?

Verkettung von Funktionen

Sei f konkav und sei g monoton wachsend und konkav.

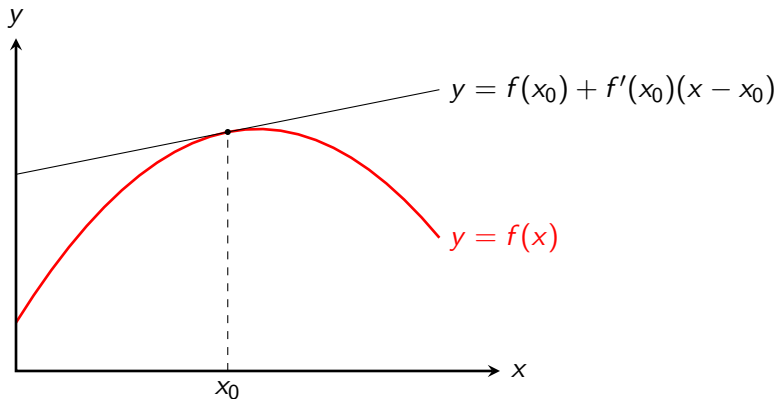
Dann ist $g \circ f$ ebenfalls konkav.

Inverse von Funktionen

Sei f streng monoton wachsend und konkav.

Dann ist $g = f^{-1}$ streng monoton wachsend und konvex.

8.4 Tests der ersten Ableitung



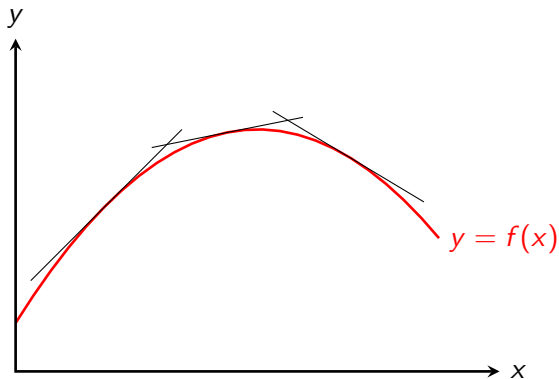
Charakterisierung von konkaven und konvexen Funktionen

Die Funktion f sei differenzierbar.

- ▶ f ist konkav genau dann, wenn für alle x_0 und x gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

f konkav: Die Steigung der Tangente fällt in x



f konvex: Die Steigung der Tangente wächst in x



8.5 Tests der zweiten Ableitung

Sei f zweimal differenzierbar.

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \mathbf{konkav} &\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \text{ f\"ur alle } x \\ &\Leftrightarrow f' \text{ ist monoton fallend} \end{aligned}$$

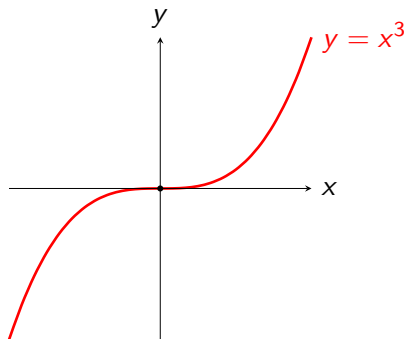
$$\begin{aligned} f \text{ ist } \mathbf{konvex} &\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ f\"ur alle } x \\ &\Leftrightarrow f' \text{ ist monoton wachsend} \end{aligned}$$

8.6 Wendestellen

Sei f zweifach differenzierbar.

Die Stelle x_0 heißt **Wendestelle** für f , falls f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

Der Punkt $P = (x_0, f(x_0))$ heißt **Wendepunkt** des Graphen von f .



Zusammenfassung

- ▶ Konkavität / Konvexität
- ▶ Summen und Minima / Maxima
- ▶ Verkettung und Inverse
- ▶ Tests der ersten Ableitung
- ▶ Tests der zweiten Ableitung
- ▶ Wendestellen und Wendepunkte