Vorlesung zu Kapitel 07:[1]

Anwendungen der Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das Wichtigste aus dem Vorkurs

Ableitungsregeln

$$f(x) = Ax^r \leadsto f'(x) = r \cdot Ax^{r-1}$$

Produktregel

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \leadsto h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kettenregel

$$h(x) = f(g(x)) \leadsto h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Summenregel

$$h(x) = f(x) + g(x) \leadsto h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$h(x) = e^x \rightsquigarrow h'(x) = e^x$

$h(x) = \ln(x) \rightsquigarrow h'(x) = \frac{1}{x}$

Potenzregeln

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

7.1 Implizites Differenzieren

Manchmal werden Funktionen implizit durch eine Gleichung definiert.

Beispiele:

$$x\overbrace{f(x)}^{=y} = 18$$

$$\sqrt{f(x)} = x$$

$$f(x)^3 + 3x^2 f(x) = 13$$

Wie bestimmt man die Ableitung der jeweiligen Funktion?

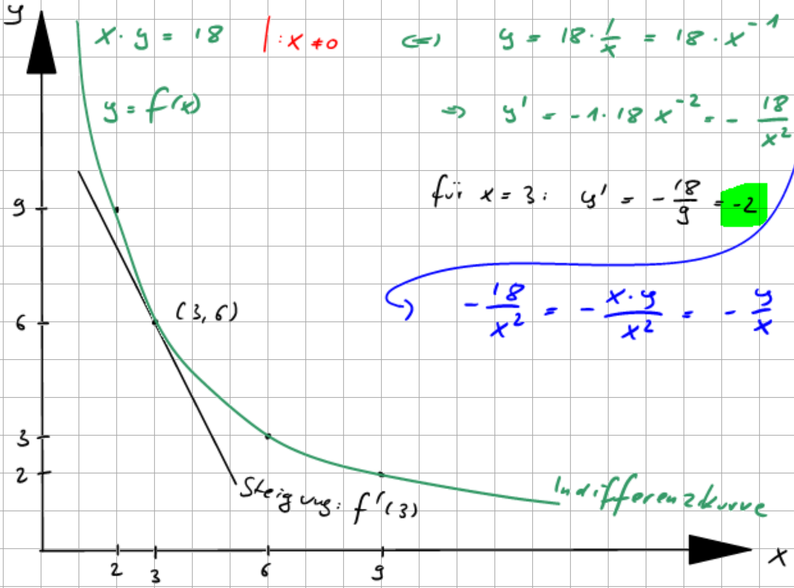
$$x \cdot y = 18 \quad \Big| : x \neq 0 \iff y = 18 \cdot \frac{1}{x} = 18 \cdot x^{-1}$$

$y = f(x)$

$$\Rightarrow y' = -1 \cdot 18\, x^{-2} = -\frac{18}{x^2}$$

für $x = 3$: $y' = -\frac{18}{9} = \boxed{-2}$

$$-\frac{18}{x^2} = -\frac{x \cdot y}{x^2} = -\frac{y}{x}$$



$$y' = -\frac{y}{x} = -\frac{6}{3} = \boxed{-2}$$

Implizite Differentiation

Wenn zwei Variablen x und y durch eine Gleichung in Beziehung stehen, erhältst Du y' so:

(i) Differenziere jede Seite der Gleichung nach x. Betrachte dabei y als Funktion von x.

(ii) Löse die resultierende Gleichung nach y' auf.

$$\overbrace{x \cdot y}^{l} = \overbrace{18}^{r}$$

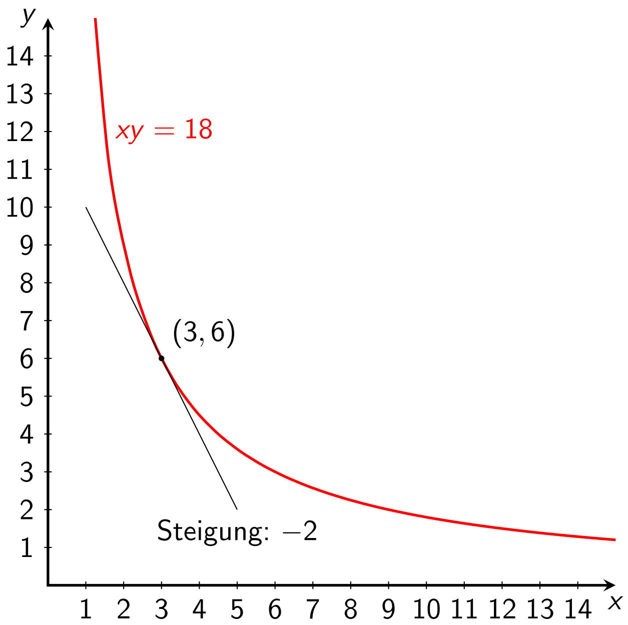
$$l' = 1 \cdot y + x \cdot y' = 0 = r'$$

$$\Leftrightarrow \quad y + x \cdot y' = 0 \qquad | -y$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot y' = -y \qquad | : x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

Beispiel: $xf(x) = 18$ für $x > 0$



$$\underbrace{\sqrt{f(x)}}_{\ell} = \underbrace{x}_{r}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

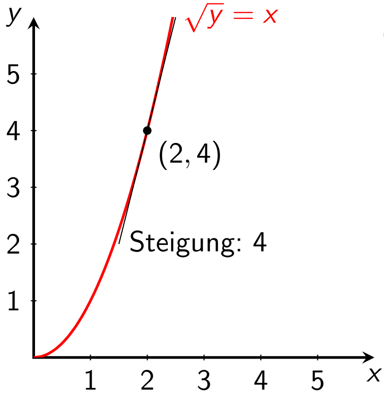
$$\ell' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) = 1 = r' \quad \Big| \cdot 2\sqrt{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot \sqrt{f(x)}$$

$$f(x) = x^2$$

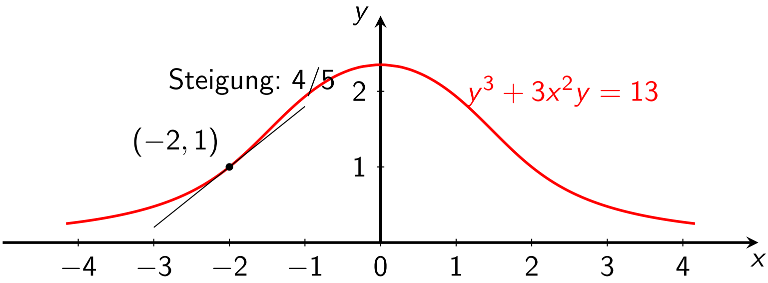
$$f'(x) = 2 \cdot x$$

Beispiel: $\sqrt{f(x)} = x$ für $f(x), x > 0$



$y' = 2 \cdot x$

Beispiel: $f(x)^3 + 3x^2 f(x) = 13$



$$\underbrace{f(x)^3 + 3x^2 \cdot f(x)}_{l} = \underbrace{13}_{r}$$

$$l' = \left(f(x)^3\right)' + \left(3x^2 \cdot f(x)\right)'$$

$$= \underline{3} \cdot f(x)^2 \cdot f'(x) + \underline{3}\left(2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)\right) = 0 = r' \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)^2 \cdot f'(x) + \underline{2 \cdot x f(x)} + x^2 \cdot f'(x) = 0 \quad | -2x f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{f(x)^2 \cdot f'(x) + x^2 \cdot f'(x)} = -2x f(x)$$

$$= \left(f(x)^2 + x^2\right) \cdot f'(x) = -2x f(x) \quad | :\left(f(x)^2 + x^2\right)$$

$x = -2,\ f(x) = 1:$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = -\frac{2x f(x)}{f(x)^2 + x^2} \qquad -\frac{2 \cdot (-2) \cdot 1}{1^2 + (-2)^2} = \frac{4}{5}$$

7.3 Ableitung der Inversen

Sei f eine differenzierbare Funktion mit der inversen Funktion g.

Wenn für einen inneren Punkt x_0 gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beispiel: Produktionsfunktion und Faktornachfrage

Es gelte $f(x) = \sqrt{x}$.

Wie lauten $f'(x)$, $g(y)$ und $g'(y)$?

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g(y) = y^2$$

$$g'(y) = 2y$$

$$g'(y) = 2 \cdot y = 2\sqrt{x} = \frac{1}{f'(x)}$$

$= f(x)$
$= \sqrt{x}$

7.4 Lineare Approximation

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

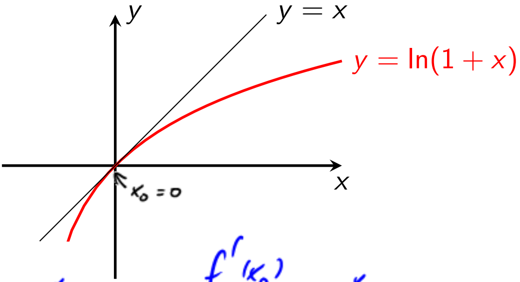
Falls f linear ist und eine Gerade beschreibt, so ist die Approximation exakt.

(Siehe Gleichung einer Tangente.)

Beispiel: Lineare Approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Beispiel: $f(x) = \ln(1+x)$



$$f(x) \approx \underbrace{\ln(1+\overset{x_0}{0})}_{f(x_0)} + \overbrace{\frac{1}{1+\underset{x_0}{0}}}^{f'(x_0)} \cdot (x - \overset{x_0}{0}) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + x = x$$

Lineare Approximation: Übung

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

Wie lautet die lineare Approximation von

$$f(x) = \ln(1+x)$$

in der Nähe eines beliebigen Punktes $x_0 > -1$?

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= \ln(1+x_0) \\ f'(x_0) &= \frac{1}{1+x_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \approx \ln(1+x_0) + \frac{1}{1+x_0}(x - x_0)$$

$$= \ln(1+x_0) + \frac{1}{1+x_0} \cdot x - \frac{1}{1+x_0} \cdot x_0$$

$$= \underbrace{\ln(1+x_0) - \frac{x_0}{1+x_0}}_{\text{Achsenabschnitt}} + \underbrace{\frac{1}{1+x_0}}_{\text{Steigung}} \cdot x$$

Das Differential einer Funktion

Sei f eine differenzierbare Funktion und $dx \neq 0$ eine beliebige Änderung der Variablen x

Differential von $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx$$

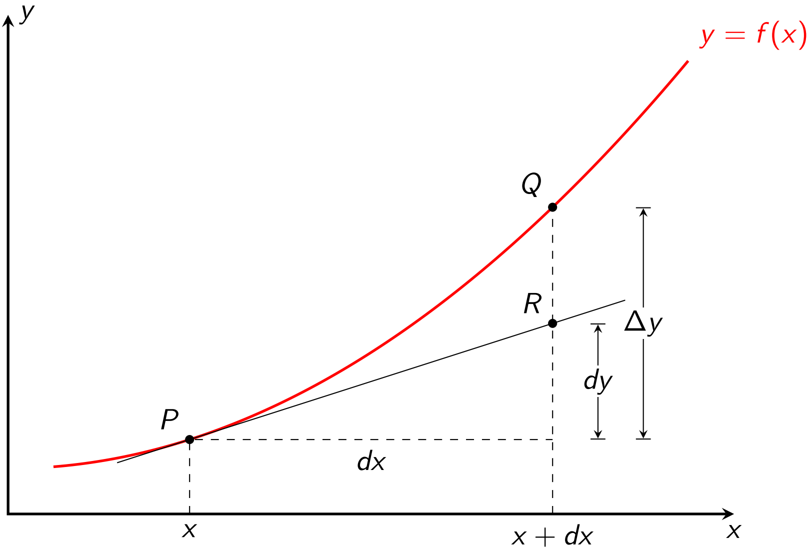
Differenz des Funktionswertes $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

Für dx klein gilt

$$\Delta y \approx dy$$

Darstellung des Differentials dy und der Differenz Δy



Differenz und Differential: Übung

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Berechne das Differential dy und die Differenz Δy für folgende Funktion:

$$f(x) = 1 + x^2$$

Begründe, warum $dy \approx \Delta y$ für dx klein.

$f'(x) = 2 \cdot x$

$dy = f'(x) \cdot dx = 2 \cdot x \cdot dx$

$$\Delta y = f(x+dx) - f(x) = \overbrace{1 + (x+dx)^2}^{f(x+dx)} - \overbrace{(1 + x^2)}^{f(x)}$$

$$= \cancel{1} + \cancel{x^2} + 2x\,dx + (dx)^2 - \cancel{1} - \cancel{x^2}$$

$$= \underbrace{2x\,dx}_{dy} + (dx)^2$$

7.5 Polynomiale Approximation

Die quadratische Approximation an $f(x)$ um $x = x_0$

Für x in der Nähe von x_0 gilt:

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Lineare Approximation}} + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$$

Quadratische Approximation: Übung

Wie lautet die quadratische Approximation von

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

in der Nähe $x = x_0$?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f(x) \approx \ln(1+x_0) + \frac{1}{1+x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\overbrace{\left(-\frac{1}{(1+x_0)^2}\right)}^{f''(x_0)}(x-x_0)^2$$

7.7 Elastizitäten

Wenn f an der Stelle x differenzierbar und $f(x) \neq 0$ ist, dann ist die **Elastizität von** f bezüglich x gleich:

$$El_x f(x) = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

Die Elastizität misst:

Wenn sich das Funktionsargument x um 1% ändert, ändert sich der Funktionswert $f(x)$ um $El_x f(x)$%.

Relative Änderungen

%-Änderung des Funktionswertes $f(x)$: $$\frac{f(x+dx)-f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta f}{f(x)}$$

%-Änderung der Variablen x : $$\frac{x+dx-x}{x} = \frac{dx}{x}$$

Rate der relativen Änderungen:

$$\frac{\text{\%-Änderung } f(x)}{\text{\%-Änderung } x} = \frac{\frac{\Delta f}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\Delta f}{f(x)}\frac{x}{dx} = \frac{\Delta f}{dx}\frac{x}{f(x)}$$

Falls dx klein: $\Delta f \approx df$ und

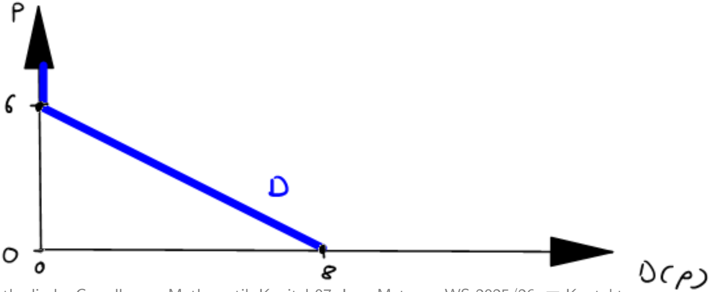
$$\frac{\text{\%-Änderung } f(x)}{\text{\%-Änderung } x} \approx \frac{df}{dx}\frac{x}{f(x)} = El_x f(x)$$

Preiselastizität der Nachfrage: Übung

$$\underbrace{D'(p)}_{<0} \cdot \frac{p}{D(p)} < 0$$

$$D(p) = \begin{cases} 8 - \frac{4}{3}p & \text{falls } p < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeichne den Graph von D in ein Diagramm.
   Trage hierbei den Preis auf der vertikalen Achse ein.
2. Berechne die Elastizität von D für $0 \leq p < 6$
3. Kennzeichne die Bereiche $El_p D(p) < -1$ und $El_p D(p) > -1$.



$$D(p) = 8 \underbrace{- \frac{4}{3}}_{D'(p)} p \quad (\text{für } p < 6)$$

Elastizität $\quad D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$

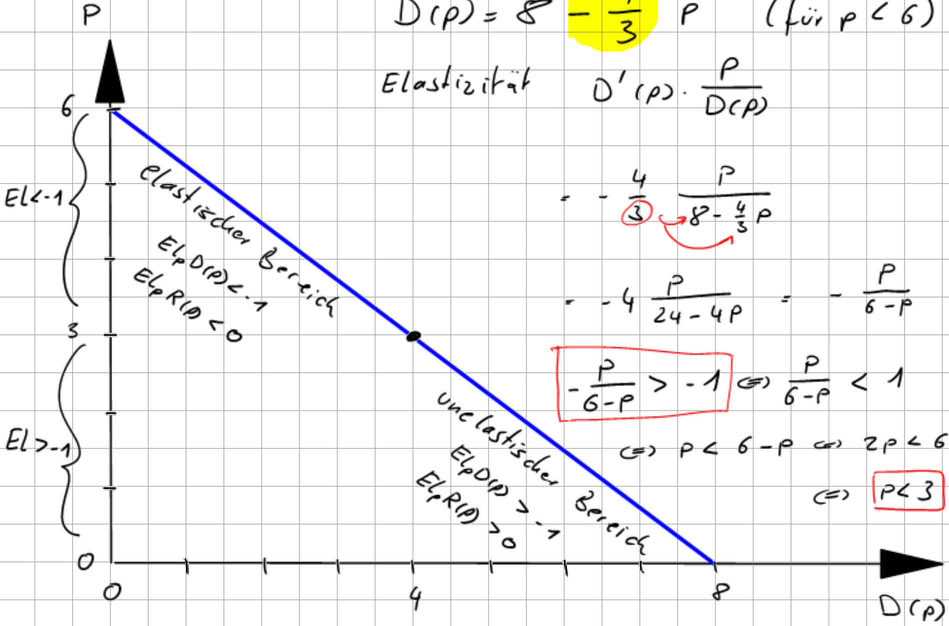
$$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{p}{8 - \frac{4}{3}p}$$

$$= -4 \frac{p}{24 - 4p} = -\frac{p}{6-p}$$

$$\boxed{-\frac{p}{6-p} > -1} \Leftrightarrow \frac{p}{6-p} < 1$$

$$\Leftrightarrow p < 6 - p \Leftrightarrow 2p < 6$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p < 3}$$



Elastizität eines Produktes von Funktionen

Die Elastizität eines Produktes von Funktionen ist die Summe der Elastizitäten der Funktionen:

Produktregel

$$(f(x)g(x))' \frac{x}{f(x)g(x)} = f'(x)\frac{x}{f(x)} + g'(x)\frac{x}{g(x)}$$

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' \frac{x}{f(x) \cdot g(x)} = \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right) \cdot \frac{x}{f(x) \cdot g(x)}$$

$$= f'(x) \cdot \cancel{g(x)} \cdot \frac{x}{f(x) \cdot \cancel{g(x)}} + \cancel{f(x)} \cdot g'(x) \cdot \frac{x}{\cancel{f(x)} \cdot g(x)}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} + g'(x) \cdot \frac{x}{g(x)}$$

Preiselastizität des Erlöses

Sei $R(p) = D(p)p$ der Erlös.

Die Elastizität der Erlösfunktion $R(p)$ bezüglich des Preises p ist:

$$El_p R(p) = \frac{dR(p)}{dp}\frac{p}{R(p)} = \overbrace{\frac{dD(p)}{dp}}^{= D'(p)} \frac{p}{D(p)} + \overbrace{\frac{dp}{dp} \cdot \frac{p}{p}}^{=1} = El_p D(p) + 1$$

Wann ist die Elastizität des Erlöses gleich null?

$$El_p R(p) = El_p D(p) + 1 = 0 \Leftrightarrow El_p D(p) = -1$$

Elastizität von Potenzfunktionen

$f'(x) = r \cdot A x^{r-1}$

Elastizität

Sei f eine Produktionsfunktion mit $f(x) = Ax^r$, wobei $A > 0$ und $r \in (0,1)$ Konstanten sind und $x \geq 0$ die Inputmenge.

Dann ist die Elastizität der Produktionsfunktion bezüglich der Inputmenge x gegeben durch

$$El_x f(x) = f'(x)\frac{x}{f(x)} = r \cdot A x^{r-1} \cdot \frac{x}{Ax^r}$$

$$= r \cdot A x^{r-1} \cdot x^1 \frac{1}{Ax^r}$$

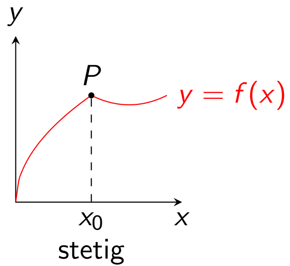
$$= r \cdot A x^{r-1+1} \cdot \frac{1}{Ax^r}$$

$$= r \cdot \cancel{Ax^r} \frac{1}{\cancel{Ax^r}} = r$$

7.8 Stetigkeit

Die Funktion f ist **stetig** an der Stelle $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



Eigenschaften von stetigen Funktionen

Wenn f und g stetig in x_0 sind, so gilt:

(a) $f + g$ und $f - g$ sind stetig in x_0.

(b) fg und f/g, falls $g(x_0) \neq 0$, sind stetig in x_0.

(c) $(f(x))^r$ ist stetig in x_0, falls $(f(x))^r$ definiert ist, wobei $r \in \mathbb{R}$.

(d) Wenn f eine Inverse hat auf dem Intervall I, so ist die Inverse f^{-1} stetig auf $f(I)$.

Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer der folgenden Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch Null) und Verkettung, erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

Stetigkeit: Übung

Welche der drei folgenden Funktionen ist/sind stetig?

Potenz ✓ $\left(= x^{\frac{1}{2}}\right)$

alle Einzelfunktion sind stetig
⇒ Summe auch stetig.

$$f(x) = x^2 - 1 + 4\sqrt{x} - (1+x)^2,\ x \geq 0$$

unstetig

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \Leftarrow \text{Sprungstelle!} \\ 0{,}7 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \Leftarrow \text{Sprungstelle!} \\ 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$, klein

$g(1-\varepsilon) = 0$

$g(1+\varepsilon) = 0{,}7$

$g(2-\varepsilon) = 0{,}7$

$g(2+\varepsilon) = 1$

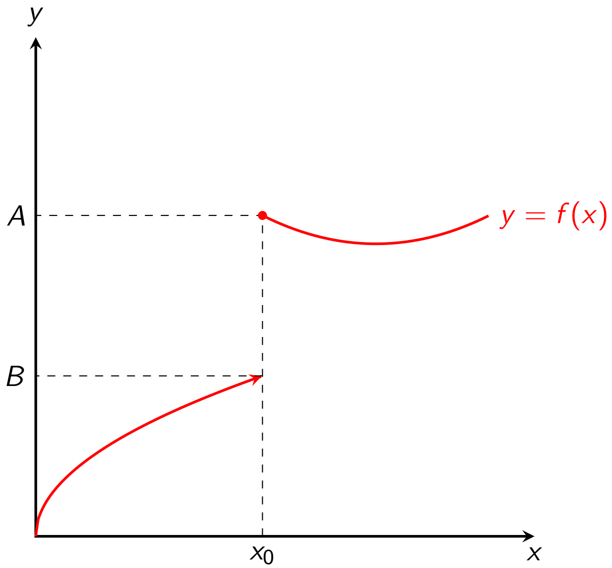
$\varepsilon > 0$, klein

$h(1) = 1$

$h(1+\varepsilon) = \sqrt{1+\varepsilon}$

$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \sqrt{1+0} = 1$

7.9 Mehr über Grenzwerte: Fehlender Grenzwert



Einseitige Grenzwerte

Im Diagramm der vorigen Folie:

$f(x)$ strebt gegen B, wenn x gegen x_0 von links strebt und $f(x)$ strebt gegen A, wenn x gegen x_0 von rechts strebt.

Notation:

Linksseitiger Grenzwert B

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^-}{\longrightarrow} B$$

Rechtsseitiger Grenzwert A

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x \to x_0^+}{\longrightarrow} A$$

Einseitige Stetigkeit

Sei f eine Funktion deren Definitionsbereich ein offenes Intervall (a, b) enthält.

f ist **linksseitig stetig** in $x_0 \in (a, b]$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

f ist **rechtsseitig stetig** in $x_0 \in [a, b)$, falls $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

f ist **stetig** auf $[a, b]$, falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a, b]$ linksseitig stetig und in jedem Punkt $x_0 \in [a, b)$ rechtsseitig stetig ist.

Grenzwerte im Unendlichen

$f(x)$ hat den Grenzwert A, wenn x gegen unendlich strebt, falls:

$f(x)$ kann beliebig nahe an A gewählt werden, indem man x hinreichend groß wählt.

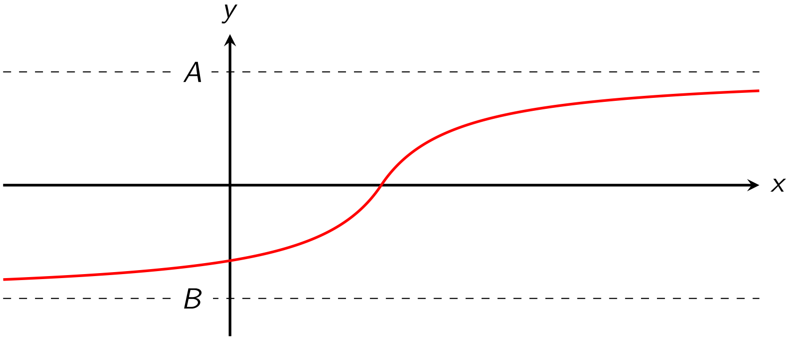
Notation:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ oder } f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} A$$

Analog:

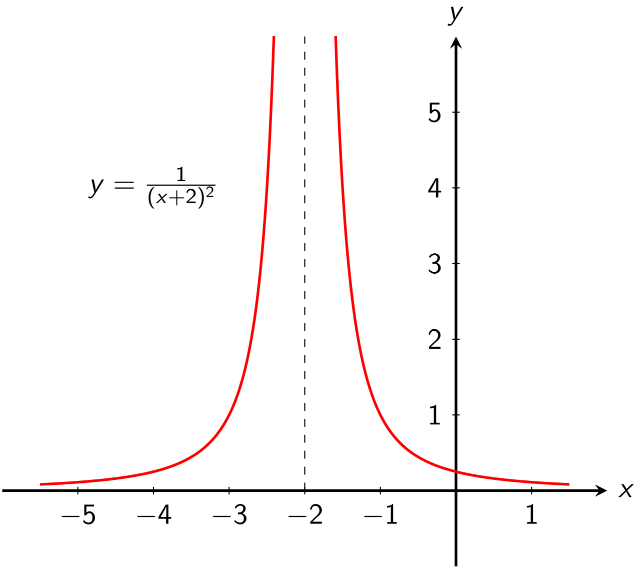
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B \text{ oder } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} B$$

Horizontale Asymptoten



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ und } \lim_{x\to-\infty} f(x) = B$$

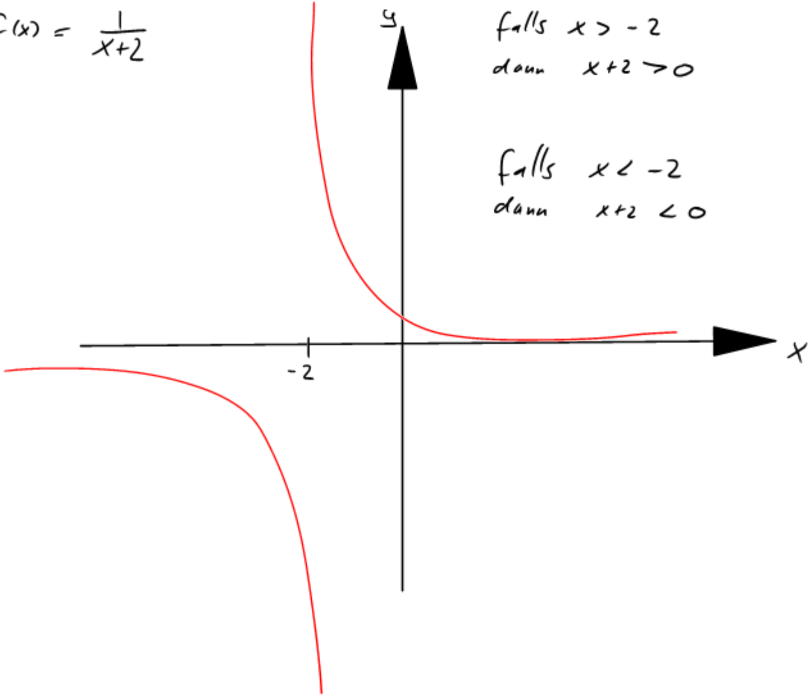
Grenzwert im Unendlichen: vertikale Asymptote



$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

falls $x > -2$
dann $x+2 > 0$

falls $x < -2$
dann $x+2 < 0$



Eigenschaften von unendlichen Grenzwerten

Falls die Funktionswerte von f und g mit $x \to x_0$ gegen unendlich streben, schreiben wir $f(x), g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$.

Dann gilt:

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty \text{ und } f(x)g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty \text{ mit } x \to x_0$$

Es gibt jedoch keine Regel für die Grenzwerte von $f(x) - g(x)$ und $f(x)/g(x)$, wenn $x \to x_0$.

Einseitige Ableitungen

Wir nennen den einseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^-)$$

die **linksseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0

und

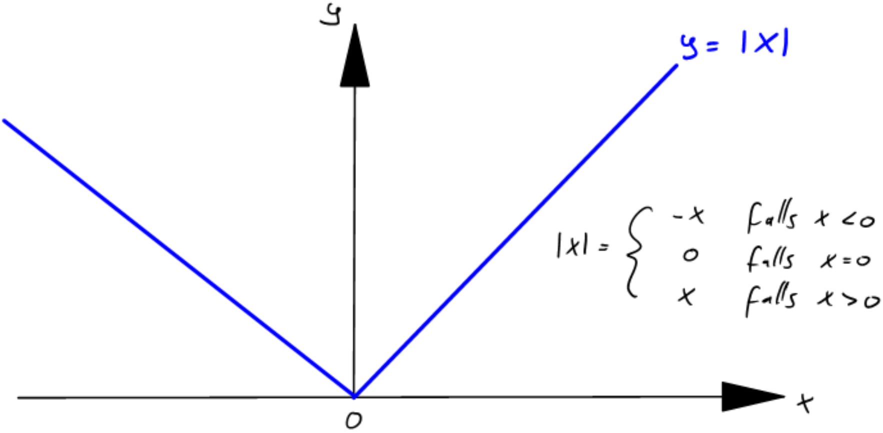
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0^+)$$

die **rechtsseitige Ableitung** von f an der Stelle x_0.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine stetige Funktion muss nicht notwendig differenzierbar sein.

Beispiel:



$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\overbrace{0+\Delta x}^{<0}) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} - \overbrace{\frac{\Delta x}{\Delta x}}^{=1} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\overbrace{0+\Delta x}^{>0}) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

Die linksseitige Ableitung ist nicht gleich der rechtsseitigen Ableitung an der Stelle $x=0$.

$\Rightarrow$ die Funktion ist nicht differenzierbar an der Stelle $x=0$.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Eine differenzierbare Funktion ist notwendig stetig.

Falls f diff'bar: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\underbrace{\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{0}}_{=0} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)}_{} - \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} f(x)}_{}$$

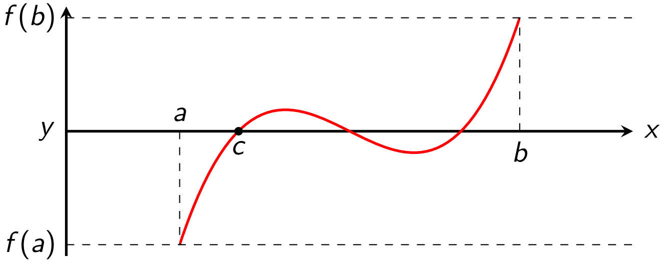
$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x) \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

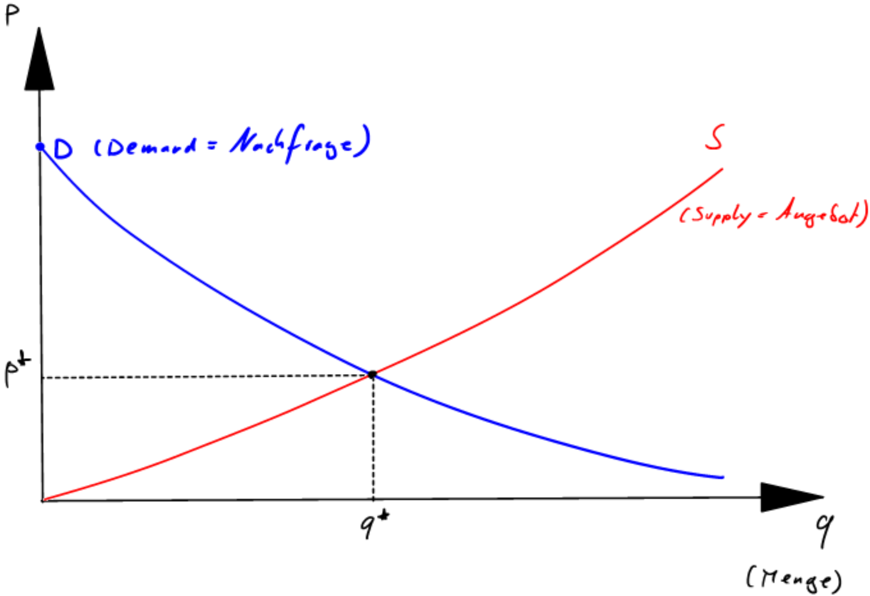
7.10 Der Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es für jeden Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens ein $c \in [a, b]$ sodass $f(c) = y$.



Anwendung: Existenz Marktgleichgewicht



Nachfragefunktion D

- D stetig
- $D(0) > 0$
- $D(p) \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$

↳ es gibt einen Preis $\bar{p}$, sodass $D(p)$ klein für alle $p \geq \bar{p}$

Überschussnachfrage

$z(p) = D(p) - S(p)$

$z(0) > 0$

$z(\bar{p}) < 0$

z stetig

Angebotsfunktion S

- S stetig
- $S(0) = 0$
- $S(p) \xrightarrow[p \to \infty]{} \infty$

↳ es gibt einen Preis $\bar{p}$, sodass $S(p) > D(p)$ für alle $p \geq \bar{p}$

Zwischenwertsatz:

es gibt p^* sodass $z(p^*) = 0$.

7.12 Regel von L'Hôpital

Quotienten mit null im Nenner

Bei der Berechnung von Quotienten achten wir darauf, dass der Nenner ungleich null ist.

Seien f und g zwei stetige Funktionen mit $g(x_0) = 0$ für ein x_0.

Für $f(x_0) > 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$.

Für $f(x_0) < 0$ gilt: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} -\infty$.

Was passiert für $f(x_0) = 0$?

Regel von L'Hôpital

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Falls $g'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beispiel $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \left.\frac{(e^x - 1)'}{1}\right|_{x=0} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$f(x_0) = 0$

$g(x_0) = 0$

$g'(x_0) \neq 0$

$x \neq x_0$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

C: Kostenfunktion

$$C(x) = \underset{\text{Fixkosten}}{F} + \underbrace{C_v(x)}_{\text{variable Kosten } (C_v(0)=0)}$$

$C'(x)$: Grenzkosten $= (F + C_v(x))' = C_v'(x)$

$\dfrac{C(x)}{x}$: Durchschnittskosten

$\dfrac{F}{x}$

$\dfrac{C_v(x)}{x}$ ⌀ variable Kosten

$$\frac{C_v(0)}{0} = \frac{C_v'(0)}{1} = C'(0)$$

Zusammenfassung

- Implizites Differenzieren
- Ableitung der Inversen
- Approximation
- Elastizitäten
- Stetigkeit
- Zwischenwertsatz
- L'Hôpital