Übung zu Kapitel 18:[1]

Nebenbedingungen in Gleichheit

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das üben wir in diesem Kapitel:

Aufgabe 18.1.1 von Seite 843

Betrachte das Problem

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \overbrace{x\cdot y}^{\text{Zielfunktion}} \ \underbrace{\text{u.d.B.}}_{\text{unter der Bedingung}} \ \overbrace{x+3y=24}^{\text{Nebenbedingung}}$$

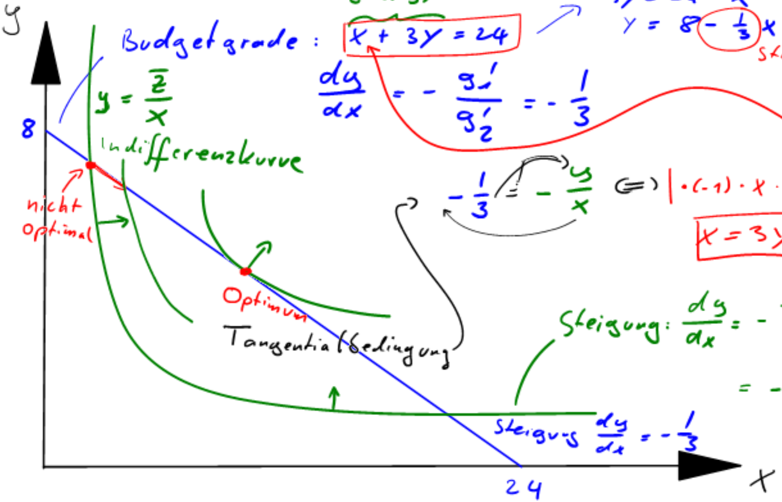
a) Verwende die Lagrange-Methode, um die einzig mögliche Lösung zu finden.

Für das Nutzenmaximierungsproblem einer allgemeinen Cobb-Douglas-Nutzenfunktion gilt:

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} A\cdot x^c\cdot y^d \text{ u.d.B. } p_x\cdot x+p_y\cdot y=m$$

$$\Rightarrow x^*=\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_x},\ y^*=\frac{d}{c+d}\frac{m}{p_y}$$

b) Überprüfe die Lösung von a), in dem Du die Resultate des allgemeinen Cobb-Douglas-Nutzenmaximierungsproblems verwendest.



Budgetgrade : $\boxed{\underbrace{x + 3y}_{g(x,y)} = 24}$

$3y = 24 - x$

$y = 8 - \frac{1}{3}x$

Steigung

$\frac{dy}{dx} = -\frac{g_1'}{g_2'} = -\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} = -\frac{y}{x} \iff \quad | \cdot(-1) \cdot x \cdot 3$

$\boxed{x = 3y}$

Steigung: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1'}{f_2'}$

$= -\frac{y}{x}$

Zielfunktion $f(x,y) = x \cdot y$

Höhenlinie : $x \cdot y = \bar{z} \iff y = \frac{\bar{z}}{x}$

$3y + 3y = 24$

$\iff \boxed{y = 4}$

$\Rightarrow \boxed{x = 12}$

Die Lagrange-Methode

$$\max_{x,y} \quad x \cdot y \qquad \text{u.d.B.} \quad x + 3y = 24$$

Lagrange-Funktion

Lagrange-Multiplikator

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}(x,y) = \underbrace{x \cdot y}_{\text{Zielfunktion}} - \lambda \underbrace{(x + 3y - 24)}_{\text{Nebenbedingung}}$$

partielle Ableitungen & NB

ii) iii) BEO

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial x} = y - \lambda \overset{!}{=} 0 \iff y = \lambda$$

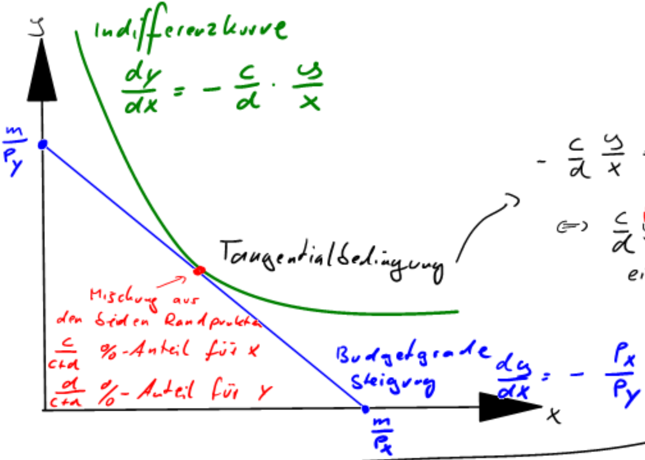
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y)}{\partial y} = x - 3\lambda \overset{!}{=} 0 \iff x = 3\lambda \iff \frac{1}{3}x = \lambda$$

$$y = \frac{1}{3}x \iff \boxed{3y = x}$$

$$\text{NB:} \quad x + 3y = 24 \Rightarrow 3y + 3y = 24 \iff \boxed{\begin{array}{l} y = 4 \\ \Rightarrow x = 12 \end{array}}$$

und $\boxed{\lambda = 4}$

Cobb-Douglas Allgemein: $\max_{x,y} A\cdot x^{c}\cdot y^{d}$ u.d.B. $P_x \cdot x + P_y \cdot y = m$



$$-\frac{c}{d}\frac{y}{x} = -\frac{P_x}{P_y} \quad \Big|\cdot(-1)\cdot x\cdot P_y$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{d}\, y\, P_y = P_x \cdot X$$

einsetzen in NB

$$\frac{c}{d}P_y \cdot y + P_y \cdot y = m \Leftrightarrow y\left(\frac{c}{d}\cdot P_y + P_y\right) = m \quad \Big| : P_y$$

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{c}{d}+1\right) = \frac{m}{P_y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{c}{d}+1}\cdot\frac{m}{P_y} = \boxed{\frac{d}{c+d}\,\frac{m}{P_y} = y^*}$$

$$P_x \cdot x = \frac{c}{\cancel{d}} \cdot \left(\frac{\cancel{d}}{c+d} \frac{m}{\cancel{P_y}} \right) \cancel{P_y} = \frac{c}{c+d} m \quad | : P_x$$

$$\Rightarrow \boxed{x^+ = \frac{c}{c+d} \frac{m}{P_x}} \qquad \boxed{y^+ = \frac{d}{c+d} \frac{m}{P_y}}$$

In der Aufgabe:

$c = d = 1 \qquad P_x = 1, \; P_y = 3 \quad , \; m = 24$

$$x^+ = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{24}{1} = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12 \checkmark$$

$$y^+ = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{24}{3} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \checkmark$$

Aufgabe 18.2.2 von Seite 847

Es sei $c(K, L) = r \cdot K + w \cdot L$ eine Kostenfunktion, wobei $r, w > 0$ und $f(K, L) = \sqrt{K} + L$ eine Produktionsfunktion für $K, L \geq 0$.

a) Interpretiere $-\frac{c_1'(K^*,L^*)}{c_2'(K^*,L^*)}$ und $-\frac{f_1'(K^*,L^*)}{f_2'(K^*,L^*)}$.

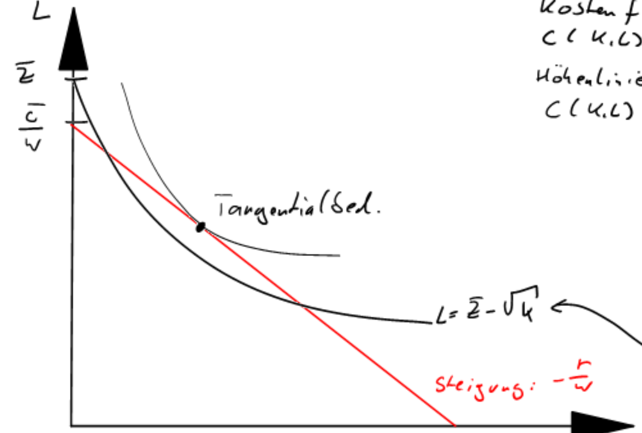
b) Löse das Problem

$$\min_{K,L \in \mathbb{R}} \; c(K, L) \text{ u.d.B. } f(K, L) = Q \;,$$

wobei $Q > w/2r$.

c) Verifiziere, dass für die Lösung (K^*, L^*) gilt:

$$-\frac{c_1'(K^*, L^*)}{c_2'(K^*, L^*)} = -\frac{f_1'(K^*, L^*)}{f_2'(K^*, L^*)}$$



Kostenfkt:

$C(K,L) = r \cdot K + w \cdot L$

Höhenlinie:

$C(K,L) = r \cdot K + w \cdot L = \bar{c}$

$\Leftrightarrow w \cdot L = \bar{c} - r \cdot K$

$\Leftrightarrow L = \underbrace{\boxed{\frac{\bar{c}}{w}}}_{\text{y-Achsen Abschnitt}} \underbrace{\boxed{- \frac{r}{w}}}_{\text{Steigung}} K$

Produktionsfkt.

$f(K,L) = \sqrt{K} + L$

Höhenlinie:

$\sqrt{K} + L = \bar{z}$

$\Leftrightarrow L = \bar{z} - \sqrt{K}$

Implizite Funktionen Theorem:

Steigung Höhenlinie von $C(K,L)$

$$\frac{dL}{dK} = - \frac{c_1'(K,L)}{c_2'(K,L)} = - \frac{r}{w}$$

Steigung Höhenlinie Produktionsfkt:

$$\frac{dL}{dK} = - \frac{f_1'(K,L)}{f_2'(K,L)} = - \frac{\frac{1}{2\sqrt{K}}}{1} = - \frac{1}{2\sqrt{K}}$$

$$\min_{K,L} \quad rK + w\cdot L \quad \text{u.d.B.} \quad \sqrt{K} + L = Q$$

i) $$\mathcal{L}(K,L) = r\cdot K + w\cdot L - \lambda(\sqrt{K} + L - Q)$$

ii) $$\frac{\partial \mathcal{L}(K,L)}{\partial K} = r - \lambda \frac{1}{2\sqrt{K}} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow r = \lambda \cdot \frac{1}{2\sqrt{K}} \Leftrightarrow 2\sqrt{K}\cdot r = \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(K,L)}{\partial L} = w - \lambda \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow w = \lambda$$

$$2\sqrt{K}\cdot r = w$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{K} = \frac{w}{2r}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{w^2}{4r^2}}$$

iii) $$\sqrt{K} + L = Q$$

$$\Leftrightarrow L = Q - \sqrt{K} = Q - \frac{w}{2r} > 0$$

$$\boxed{K^* = \frac{w^2}{4r^2}, \quad L^* = Q - \frac{w}{2r}} \qquad \boxed{\lambda^* = w}$$

Tangentialbedingung:

$$-\frac{r}{w} = -\frac{1}{2\sqrt{K}} = -\frac{1}{2\frac{w}{2r}} = -\frac{r}{w} \quad \checkmark$$

Nichtnegativitätsbedingungen

Betrachte das Nutzenmaximierungsproblem

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; x + \ln(1+y) \text{ u.d.B. } 16x + y = 495, x \geq 0, y \geq 0$$

a) Schreibe die notwendigen Bedingungen mit Nichtnegativitätsbedingungen für eine Lösung auf.
b) Bestimme die Lösung des Problems.
c) Schätze ab, um wieviel der Nutzen ungefähr zunimmt, wenn das Einkommen von 495 auf 500 steigt.

i) $\mathcal{L}(x,y) = x + \ln(1+y) - \lambda(16x + y - 495)$

iii)

ii) $\mathcal{L}_1'(x,y) = 1 - 16\lambda \quad \leq 0 \quad (=0 \text{ falls } x^* > 0)$

Nichtnegativitätsbedingung

$\mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{1}{1+y} - \lambda \quad \leq 0 \quad (=0 \text{ falls } y^* > 0)$

$16x + y = 495$

Fall 1: $x^* > 0,\ y^* > 0$

$\left.\begin{array}{l} 1 - 16\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{1+y} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1+y} \end{array}\right\} \frac{1}{16} = \frac{1}{1+y} \Leftrightarrow 1+y = 16 \Leftrightarrow \boxed{y = 15 > 0}$

$16x + 15 = 495 \Leftrightarrow 16x = 480 \Leftrightarrow \boxed{x = 30 > 0}$

$16x + 15 = 500 \Leftrightarrow 16x = 480+5$

$x = 30 + \frac{5}{16}$

Fall 2: $x^* = 0 \Rightarrow y = 495 > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+495} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{496}$

$1 - 16\lambda \leq 0 \Rightarrow 1 - 16 \cdot \frac{1}{496} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{31} \nleq 0$ ↯

Fall 3: $y^* = 0 \Rightarrow 16x = 495 \Leftrightarrow x = \frac{495}{16} > 0$

$\Rightarrow 1 - 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{16}$

$\frac{1}{1+0} - \frac{1}{16} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{15}{16} \not\leq 0$ ↯

$\Rightarrow (x^*, y^*) = (30, 15)$ ist das Optimum

$\lambda^* = \frac{1}{16}$

$U(30, 15) = 30 + \ln(16)$

Einkommen steigt auf 500.

$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (30 + \frac{5}{16}, 15)$

$U(30 + \frac{5}{16}, 15) = 30 + \frac{5}{16} + \ln(16)$

$\Rightarrow \Delta U = \frac{5}{16}$

$$dU \approx \Delta U$$

$$\frac{dU}{dm} = \lambda \iff dU = \lambda \cdot dm$$

hier: $\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{16} \\ dm = 5 \end{array}\right\} dU = \frac{1}{16} \cdot 5 = \frac{5}{16}$

Aufgabe 10 HT 2023

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2_{\geq} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x + y$ und $g(x, y) = x^3 y$.

Gesucht ist nach dem Optimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ des Problems

$$\min_{x,y} f(x, y) \text{ u.d.B. } g(x, y) = 16$$

Wie lautet der Wert von f an der Stelle (x^*, y^*)?

a) 2

b) 4

c) 16

d) 8

Aufgabe 11 HT 2024

Es sei folgendes Maximierungsproblem gegeben:

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} (x+1)\cdot(y-2) \text{ u.d.B. } 2x+3y=16$$

Es sei angenommen, dass dieses Problem eine Maximumstelle besitzt.

Welcher der folgenden Punkte ist diese Maximumstelle?

a) $(x,y)=(1,6)$

b) $(x,y)=(2,4)$

c) $(x,y)=(5,2)$

d) $(x,y)=(-1,6)$

Aufgabe 12 HT 2024

Es sei folgendes Optimierungsproblem gegeben:

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} -x^2 + y^2 \text{ u.d.B. } x^2 + y^2 = r^2$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

✓a) $-x^2 + y^2 \geq -r^2$ für alle x, y, die $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen.

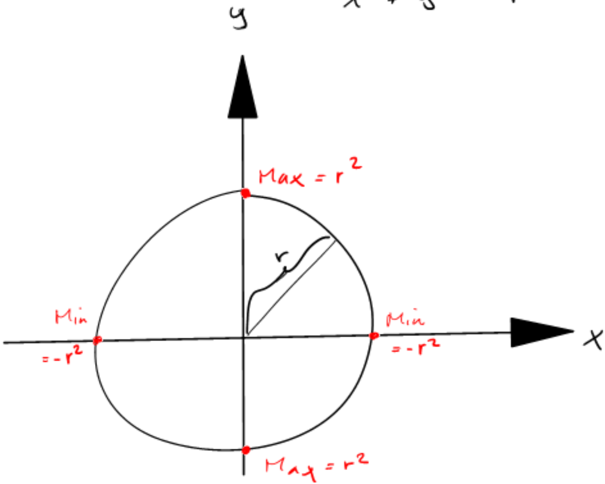
b) $-x^2 + y^2 \leq -r^2$ für alle x, y, die $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen.

c) $-x^2 + y^2 \geq r^2$ für alle x, y, die $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen.

d) Dieses Optimierungsproblem hat keine Lösung.

$-x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = r^2$



Aufgabe 10 NT 2023

$y^* = \frac{2}{3} \frac{204}{4}$

$= \frac{1}{3} \cdot 102$

$= 34$

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} \; x \cdot y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$17 \cdot x + 4 \cdot y = 204$$

Wie lautet die Lösung (x^*, y^*) dieses Problems?

a) $(x^*, y^*) = (68, 136)$

b) $(x^*, y^*) = (12, 51)$

c) $(x^*, y^*) = (4, 17)$

d) $(x^*, y^*) = (4, 34)$ ✓