Übung zu Kapitel 18:[1]

Nebenbedingungen in Gleichheit

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das üben wir in diesem Kapitel:

Aufgabe 18.1.1 von Seite 843

Betrachte das Problem

f(x,y), Zielfunktion

g(x,y)

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; x \cdot y \text{ u.d.B. } \underbrace{x + 3y = 24}_{\text{Nebenbedingung}}$$

a) Verwende die Lagrange-Methode, um die einzig mögliche Lösung zu finden.

Für das Nutzenmaximierungsproblem einer allgemeinen Cobb-Douglas-Nutzenfunktion gilt:

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; A \cdot x^c \cdot y^d \text{ u.d.B. } p_x \cdot x + p_y \cdot y = m$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_x}, \;\; y^* = \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_y}$$

b) Überprüfe die Lösung von a), in dem Du die Resultate des allgemeinen Cobb-Douglas-Nutzenmaximierungsproblems verwendest.

i) $\mathcal{L}(x,y) = x \cdot y - \lambda(x + 3y - 24)$

ii) $\mathcal{L}'_1(x,y) = y - \lambda \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = \lambda$

$\mathcal{L}'_2(x,y) = x - \lambda \cdot 3 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = \lambda$

$\mathcal{L}'_\lambda(x,y) \quad x + 3y - 24 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x + 3y = 24$

$y = \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 3y = x$

$\Rightarrow x + x = 24$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 12 \\ y &= 4 \end{aligned}}$

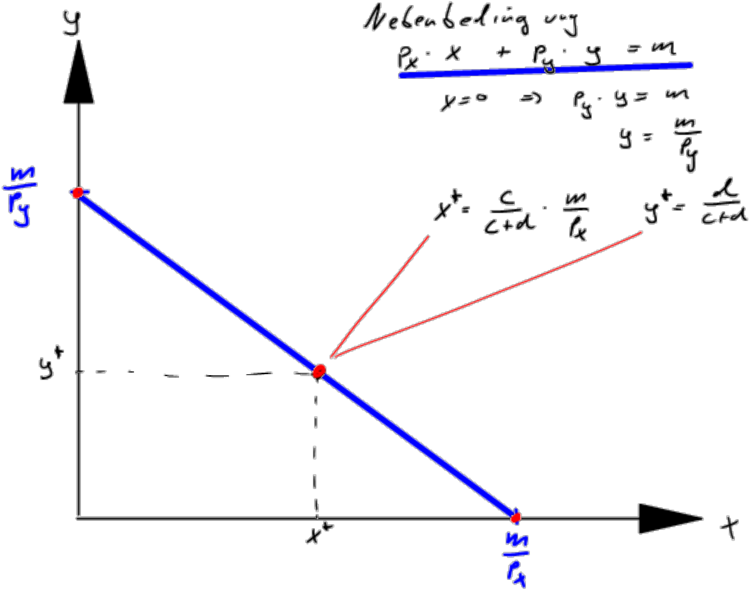
Nebenbedingung

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = m$$

$$x = 0 \Rightarrow p_y \cdot y = m$$

$$y = \frac{m}{p_y}$$

$$x^* = \frac{c}{c+d} \cdot \frac{m}{p_x} \qquad y^* = \frac{d}{c+d} \cdot \frac{m}{p_y}$$



b $\max_{x,y} \; x \cdot y \quad \text{udB} \quad x + 3y = 24$

allgemein:

$$A \cdot x^c \cdot y^d \quad \text{udB} \quad P_x \cdot x + P_y \cdot y = m$$

$A = 1 \quad c, d = 1 \quad \left(\frac{c}{c+d}, \frac{d}{c+d} = \frac{1}{2} \right) \quad P_x = 1 \quad P_y = 3, \; m = 24$

$\frac{m}{P_x} = 24 \qquad \frac{m}{P_y} = \frac{24}{3} = 8$

$x^* = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12 \qquad y^* = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

Falls Zielfunktion $A \cdot x^2 + y$

$\Rightarrow$ kein Cobb-Douglas!

Aufgabe 18.2.2 von Seite 847

Es sei $c(K,L) = r \cdot K + w \cdot L$ eine Kostenfunktion, wobei $r, w > 0$ und $f(K,L) = \sqrt{K} + L$ eine Produktionsfunktion für $K, L \geq 0$.

a) Interpretiere $-\frac{c_1'(K^*,L^*)}{c_2'(K^*,L^*)}$ und $-\frac{f_1'(K^*,L^*)}{f_2'(K^*,L^*)}$.

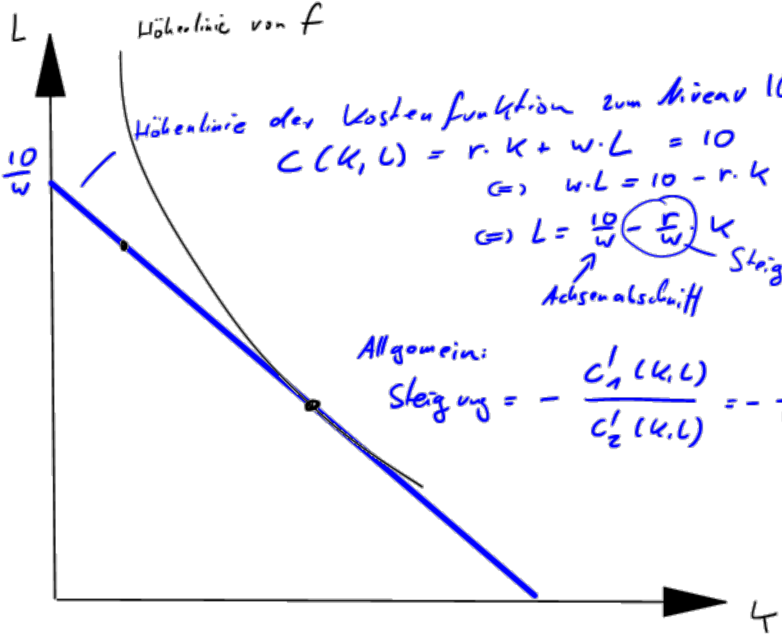
b) Löse das Problem

$$\min_{K,L \in \mathbb{R}} \ c(K,L) \text{ u.d.B. } f(K,L) = Q \ ,$$

wobei $Q > w/2r$.

c) Verifiziere, dass für die Lösung (K^*, L^*) gilt:

$$-\frac{c_1'(K^*,L^*)}{c_2'(K^*,L^*)} = -\frac{f_1'(K^*,L^*)}{f_2'(K^*,L^*)}$$



Höhenlinie der Kostenfunktion zum Niveau 10

$$c(K,L) = r\cdot K + w\cdot L = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad w\cdot L = 10 - r\cdot K$$

$$\Leftrightarrow \quad L = \frac{10}{w} - \frac{r}{w}\cdot K$$

Achsenabschnitt

Steigung

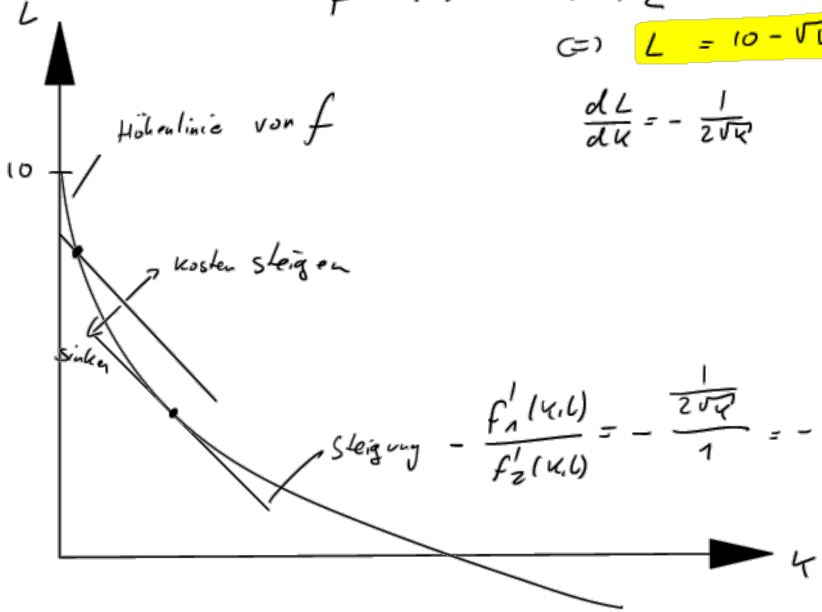
Allgemein:

$$\text{Steigung} = -\frac{c_1'(K,L)}{c_2'(K,L)} = -\frac{r}{w}$$

$$f(K,L) = \sqrt{K} + L = 10$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L = 10 - \sqrt{K}}$$

$$\frac{dL}{dK} = -\frac{1}{2\sqrt{K}}$$



Steigung $-\frac{f'_1(K,L)}{f'_2(K,L)} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{K}}}{1} = -\frac{1}{2\sqrt{K}}$

$$\min_{K,L} \quad c(K,L) \quad \text{udB} \quad f(K,L) = Q$$

$$\mathcal{L}(K,L) = c(K,L) - \lambda\left(f(K,L) - Q\right)$$

$$\mathcal{L}_1'(K,L) = c_1'(K,L) - \lambda f_1'(K,L) \overset{!}{=} 0$$

$$\mathcal{L}_2'(K,L) = c_2'(K,L) - \lambda f_2'(K,L) \overset{!}{=} 0$$

$$f(K,L) \overset{!}{=} Q$$

$$c(K,L) = r \cdot K + w \cdot L \Rightarrow c_1'(K,L) = r, \quad c_2'(K,L) = w$$

$$f(K,L) = \sqrt{K} + L \Rightarrow f_1'(K,L) = \frac{1}{2\sqrt{K}}, \quad f_2'(K,L) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} r - \lambda \frac{1}{2\sqrt{K}} &= 0 \Leftrightarrow r = \lambda \frac{1}{2\sqrt{K}} \\ w - \lambda\, 1 &= 0 \qquad w = \lambda \end{aligned}\right\} \quad r = w \frac{1}{2\sqrt{K}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{K} = \frac{w}{2r}$$

$$\text{NB: } \sqrt{K} + L = Q \Rightarrow \frac{w}{2r} + L = Q \Leftrightarrow \boxed{L = Q - \frac{w}{2r}}$$

$c_1' = r \quad , \quad c_2' = w$

$f_1' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \qquad f_2' = 1$

$\sqrt{u} = \dfrac{w}{2r}$

$$-\frac{c_1'}{c_2'} = -\frac{r}{w}$$

$$-\frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{\dfrac{1}{\cancel{2}\,\dfrac{w}{\cancel{2}r}}}{1} = -\frac{r}{w}$$

Nichtnegativitätsbedingungen

Betrachte das Nutzenmaximierungsproblem

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \; x + \ln(1+y) \text{ u.d.B. } 16x + y = 495, x \geq 0, y \geq 0$$

a) Schreibe die notwendigen Kuhn-Tucker-Bedingungen mit Nichtnegativitätsbedingungen für eine Lösung auf.
b) Bestimme die Lösung des Problems.
c) Schätze ab, um wieviel der Nutzen ungefähr zunimmt, wenn das Einkommen von 495 auf 500 steigt.

$$\mathcal{L}(x,y) = x + \ln(1+y) - \lambda(16x + y - 495)$$

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 1 - \lambda \cdot 16 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{1}{1+y} - \lambda \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } y > 0)$$

$$16x + y = 495$$

<u>Fall $x, y > 0$</u>

$$1 - 16 \cdot \lambda = 0 \iff 1 = 16 \cdot \lambda \iff \lambda = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{1+y} - \lambda = 0 \iff \frac{1}{1+y} = \lambda = \frac{1}{16} \iff 1 + y = 16$$

$$\iff \boxed{y = 15 > 0}$$

$$\text{NB: } 16x + y = 495 \Rightarrow 16x = 495 - 15 = 480$$

$$\iff \boxed{x = 30} > 0$$

Fall $x=0$ $\Rightarrow$ Nebenbedingung

$16x+y=495 \Rightarrow y=495>0$

$\Rightarrow \mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{1}{1+y} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1+495} = \frac{1}{496} < \frac{1}{16}$

aber: $\mathcal{L}_1'(x,y) = 1-16\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{1}{16}$

führt zu einem Widerspruch.

Also muss $x>0$ gelten.

Fall $y=0$ $\Rightarrow$ Nebenbedingung: $16x+0=495$

$\Leftrightarrow x = \frac{495}{16} > 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1'(x,y) = 1-16\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{16}$

aber: $\mathcal{L}_2'(x,y) = \frac{1}{1+y} - \lambda = \frac{1}{1+0} - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} > 0$

Widerspruch!

Also muss auch $y>0$ gelten.

Wie verändert sich der Optimalwert, falls $495 \nearrow 500$

$$dV \approx \underbrace{\lambda}_{\frac{1}{16}} \cdot \underbrace{dm}_{500-495} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{dV}{dm} \approx \lambda$$

Aufgabe 10 HT 2023

ab 15:12

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x + y$ und $g(x, y) = x^3 y$.

Gesucht ist nach dem Optimum $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ des Problems

$$\min_{x,y} f(x, y) \text{ u.d.B. } g(x, y) = 16$$

Wie lautet der Wert von f an der Stelle (x^*, y^*)?

a) 2
b) 4
c) 16
d) 8 ✓

$\mathcal{L}(x,y) = 3x + y - \lambda(x^3 y - 16)$

$\mathcal{L}'_1(x,y) = 3 - \lambda 3x^2 \cdot y \overset{!}{=} 0 \iff \cancel{3}1 = \cancel{3}\lambda x^2 y$

$\mathcal{L}'_2(x,y) = 1 - \lambda \cdot x^3 \overset{!}{=} 0 \iff 1 = \lambda x^3$

$x^3 \cdot y = 16$

$\Rightarrow \lambda x^2 \cdot y = \lambda x^3$

$\iff \lambda = 0 \lor x = 0 \lor y = x$

$x = 0 \Rightarrow x^3 \cdot y = 0 \neq 16$

$y = x \Rightarrow x^3 \cdot y = x^4 = 16 \iff x = 2 \lor \cancel{x = -2}$

$\Rightarrow x^* = y^* = 2$

$f(2,2) = 3 \cdot 2 + 2$
$= 6 + 2$
$= 8$

Lösungsweg per Substitution $x^3 \cdot y = 16$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 16/x^3}$

$f(x, y) = 3x + y$

$\Rightarrow h(x) = 3x + \frac{16}{x^3} = 3x + 16 \cdot x^{-3}$

$h'(x) = 3 + (-3) \cdot 16 \cdot x^{-4} = 3 - \frac{48}{x^4} \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 3 = \frac{48}{x^4} \Leftrightarrow x^4 = \frac{48}{3} = 16 \Leftrightarrow x = 2$ $\cancel{\vee x = -2}$

$h''(x) = (-3) \cdot 16 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = \frac{12 \cdot 16}{x^5} > 0$

$\Rightarrow x = 2$ Min-Stelle von h

$\boxed{y = \frac{16}{2^3}} = \frac{16}{8} = 2$

Aufgabe 11 HT 2024

Es sei folgendes Maximierungsproblem gegeben:

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}} \overbrace{(x+1)\cdot(y-2)}^{f(x,y)} \text{ u.d.B. } 2x+3y=16$$

Es sei angenommen, dass dieses Problem eine Maximumstelle besitzt.

Welcher der folgenden Punkte ist diese Maximumstelle?

$2\cdot 1+3\cdot 6 = 2+18=20 > 16$

a) $(x,y)=(1,6)$ $\quad f(1,6) = (1+1)(6-2) = 2\cdot 4 = 8$

$2\cdot 2+3\cdot 4 = 4+12=16$

→ b) $(x,y)=(2,4)$ $\quad f(2,4) = (2+1)(4-2) = 3\cdot 2 = 6$

c) $(x,y)=(5,2)$ $\quad f(5,2) = (5+1)(2-2) = 6\cdot 0 = 0$

d) $(x,y)=(-1,6)$ $\quad f(-1,6) = (-1+1)(6-2) = 0\cdot 4 = 0$

Lösung mit Tangentialbedingung:

$$f(x,y) = (x+1)(y-2)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1'(x,y) &= y-2 \\ f_2'(x,y) &= x+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{y-2}{x+1}$$

$$g(x,y) = 2x + 3y$$

$$\left.\begin{aligned} g_1' &= 2 \\ g_2' &= 3 \end{aligned}\right\} -\frac{g_1'}{g_2'} = -\frac{2}{3}$$

$$+\frac{y-2}{x+1} = +\frac{2}{3}$$

$$3(y-2) = 2(x+1)$$

$$3y - 6 = 2x + 2$$

$$2x + 3y = 16$$

$$2x = 16 - 3y$$

$$3y - 6 = 16 - 3y + 2$$

$$6y = 24$$

$$\boxed{y = 4}$$

$$2x = 16 - 3 \cdot 4$$
$$= 16 - 12 = 4$$

$$\boxed{x = 2}$$

Aufgabe 12 HT 2024

a) $\cancel{-x^2} + y^2 \geq -r^2 = \cancel{-x^2} - y^2$
$\Leftrightarrow y^2 \geq -y^2$ ✓ für alle y

Es sei folgendes Optimierungsproblem gegeben:

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} -x^2 + y^2 \text{ u.d.B. } x^2 + y^2 = r^2$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Min

✓ a) $-x^2 + y^2 \geq -r^2$ für alle x, y, die $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen.

✗ b) $-x^2 + y^2 \leq -r^2$ für alle x, y, die $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen.

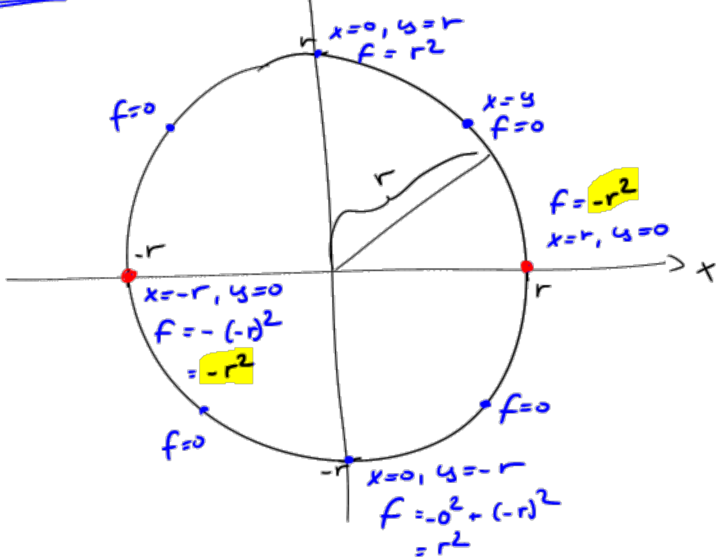
✗ c) $-x^2 + y^2 \geq r^2$ für alle x, y, die $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen.

d) Dieses Optimierungsproblem hat keine Lösung.

$-x^2 + y^2$ stetig , $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ abgeschlossen beschränkt nichtleer

$f(x,y) = \underline{-x^2 + y^2}$

$x^2 + y^2 = r^2$



Aufgabe 10 NT 2023

$c = 1, \quad \alpha = 2 \qquad p_x = 17, \quad p_y = 4 \qquad m = 204$

$x^* = \frac{1}{1+2} \cdot \frac{204}{17} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$

$y^* = \frac{2}{1+2} \cdot \frac{204}{4} = \frac{2}{3} \cdot 51 = 34$

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} \; x \cdot y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$\overset{p_x}{17} \cdot x + \overset{p_y}{4} \cdot y = 204$$

Wie lautet die Lösung (x^*, y^*) dieses Problems?

a) $(x^*, y^*) = (68, 136)$

b) $(x^*, y^*) = (12, 51)$

c) $(x^*, y^*) = (4, 17)$

d) $(x^*, y^*) = (4, 34)$

NB:

$17 \cdot 68 + 4 \cdot 136 > 204$

$17 \cdot 12 + \underbrace{4 \cdot 51}_{=204} > 204$

$\underbrace{17 \cdot 4}_{68} + \underbrace{4 \cdot 17}_{68} < 204$

$\underbrace{17 \cdot 4}_{68} + \underbrace{4 \cdot 34}_{136} = 204$