Übung zu Kapitel 17:[1]

Optimierung ohne Nebenbedingungen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

17.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen
Aufgabe 17.1.1 von Seite 793

17.2 Hinreichende Bedingungen
Aufgabe 17.2.2 von Seite 798

17.3 Lokale Extremstellen
Aufgabe 17.3.2 von Seite 805

17.7 Komparative Statik und das Envelope Theorem
Aufgabe 17.5 von Seite 831

Aufgabe 17.1.1 von Seite 793

Die Funktion f, die für alle (x, y) durch
$f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$ definiert ist, hat eine Maximumstelle. Bestimme die entsprechenden Werte von x und y.

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar

Falls f eine innere Extremstelle hat, dann gilt
dort $f_1' = 0$ und $f_2' = 0$ (die Stelle ist stationär)

hier: f ist differenzierbar , $D = \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ es gibt keine Randpunkte

$\Rightarrow$ An der Maximumstelle muss gelten $f_1' = f_2' = 0$

$$f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -4x + 4 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y + 4 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \cancel{1}2$$

$\Rightarrow$ Es gibt nur eine stationäre Stelle: $(x,y) = (1, \cancel{1}2)$

Also muss dies die Maximumstelle sein.

Bedingungen 2. Ordnung

Hessematrix

$$f'' = \begin{pmatrix} \underbrace{-4}_{<0} & 0 \\ 0 & \underbrace{-2}_{<0} \end{pmatrix}$$

$0 \cdot 0 = 0$

$(-4)(-2) = 8$

$8 > 0 \Rightarrow f$ ist streng konkav

Aufgabe 17.2.2 von Seite 798

Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Arten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten für die Produktion von x Einheiten der Sorte A und y Einheiten der Sorte B sind

$$c(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + \overbrace{514}^{\text{Fixkosten}}$$

Nehme an, dass das Unternehmen den Output zu einem Preis pro Einheit von 24 Euro für A und 12 Euro für B verkauft.

a) Finde die täglichen Produktionsniveaus x^* und y^*, die den Gewinn maximieren.

b) Es wird von dem Unternehmen verlangt, dass es genau 54 Einheiten pro Tag von den beiden Arten zusammen produziert. Wie sieht der Produktionsplan jetzt aus?

Zielfunktion

$$\pi(x,y) = \underbrace{24\cdot x + 12\cdot y}_{\text{Erlös}} \underbrace{-2x^2 + 4xy - 4y^2 + 40x + 20y - 514}_{-C(x,y):\ \text{Kosten}}$$

mit Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}^2_{\geq} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$

π ist differenzierbar

$$\frac{\partial \pi(x,y)}{\partial x} = 24 - 4x + 4y + 40$$

$$= 64 - 4x + 4y$$

$$= 4(\underbrace{16 - x + y}_{(I)}) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \pi(x,y)}{\partial y} = 12 + 4x - 8y + 20$$

$$= 32 + 4x - 8y$$

$$= 4(\underbrace{8 + x - 2y}_{(II)}) \overset{!}{=} 0$$

(I) $16 - x + y = 0$

(II) $8 + x - 2y = 0$

$(I)+(II)$ $24 - y = 0 \Leftrightarrow y = 24$

$\hookrightarrow$ in (I) $16 - x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 40$

→ Eindeutige innere stationäre Stelle.

Hinreichende Bedingung

$$\frac{\partial^2 \pi}{(\partial x)^2} = \underbrace{-4}_{<0} \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial y \partial x} = 4 \qquad 4 \cdot 4 = 16$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x \partial y} = 4 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{(\partial y)^2} = \underbrace{-8}_{<0} \qquad (-4)\cdot(-8) = 32$$

$32 > 16$ ✓

π ist streng konkav $\Rightarrow$ $x = 40,\ y = 24$ ist eine eindeutige Maximumstelle.

b) Restriktion $x + y = 54$

"udB"

$\max_{x,y \geq 0} \quad \pi(x,y)$ unter der Bedingung $x + y = 54$

$\Leftrightarrow \quad y = 54 - x$

$$\tilde{\pi}(x) = \pi(x, y(x)) \quad , \quad y(x) = 54 - x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -1$$

Kettenregel

$$\frac{d\tilde{\pi}(x)}{dx} = \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial y} \cdot \overbrace{\frac{dy}{dx}}^{=-1} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{\partial \pi}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial \pi}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} 64 - 4x + 4y & = & 32 + 4x - 8y \\ x + y & = & 54 \end{array}}$$

$$\left.\begin{aligned} 64 - 4x + 4y &= 32 + 4x - 8y \\ x + y &= 54 \end{aligned}\right\}$$

$$16 - x + y = 8 + x - 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x + 3y = -8 \qquad y = 54 - x$$

$$x + y = 54$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x + 3(54 - x) = -8 \Leftrightarrow -2x + 162 - 3x = -8$$

$$\Leftrightarrow \quad 170 = 5x \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 34 \\ y &= 20 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \quad y = 54 - 34 \Leftrightarrow$$

Aufgabe 17.3.2 von Seite 805

Betrachte die Funktion f, definiert für alle (x, y) durch
$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2$.

a) Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

b) Zeige, dass die kritischen Stellen $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ sind und klassifiziere diese.

a) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4xy + 4y$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)} = 2$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \, \partial x} = 4y$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y} = 4y$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = 4x + 4$

$\cancel{2}x + \cancel{2}y^2 = 0$

$x + y^2 = 0$

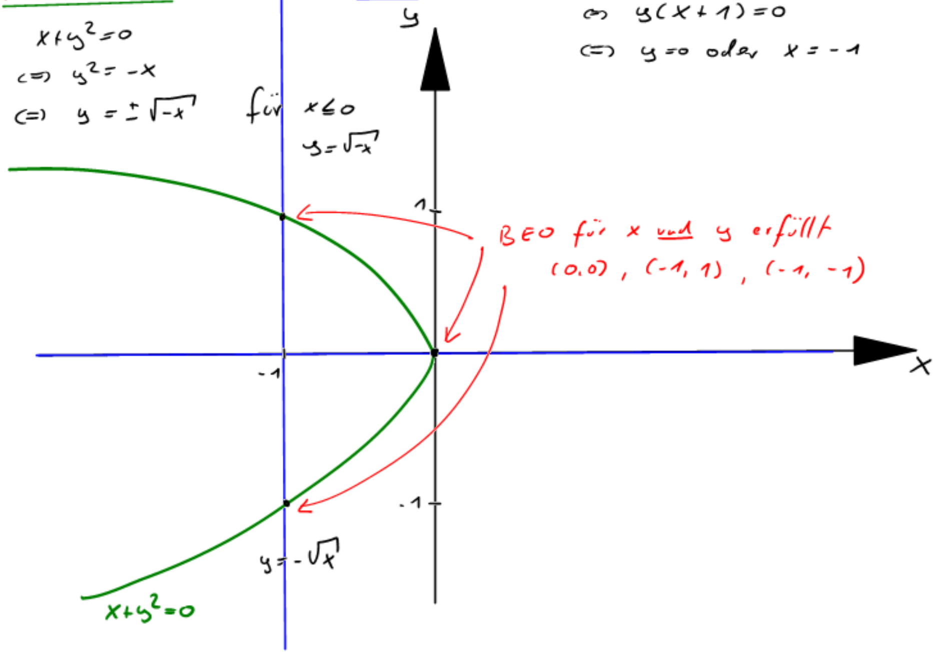
$\Leftrightarrow \quad y^2 = -x$

$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{-x} \quad$ für $x \leq 0$

$\cancel{4}xy + \cancel{4}y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy + y = 0$

$\Leftrightarrow \quad y(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = 0$ oder $x = -1$



$f_1' = 2x + 2y^2 \qquad f_2' = 4xy + 4y$

$$f'' = \begin{pmatrix} \underbrace{2}_{>0} & 4y \\ 4y & \underbrace{4x+4}_{\overset{?}{\geq} 0} \end{pmatrix}$$

$f''_{11} = 2 > 0 \Rightarrow$ f ist nicht konkav

$f''_{22} = 4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

Falls $x < -1$: f ist nicht konvex

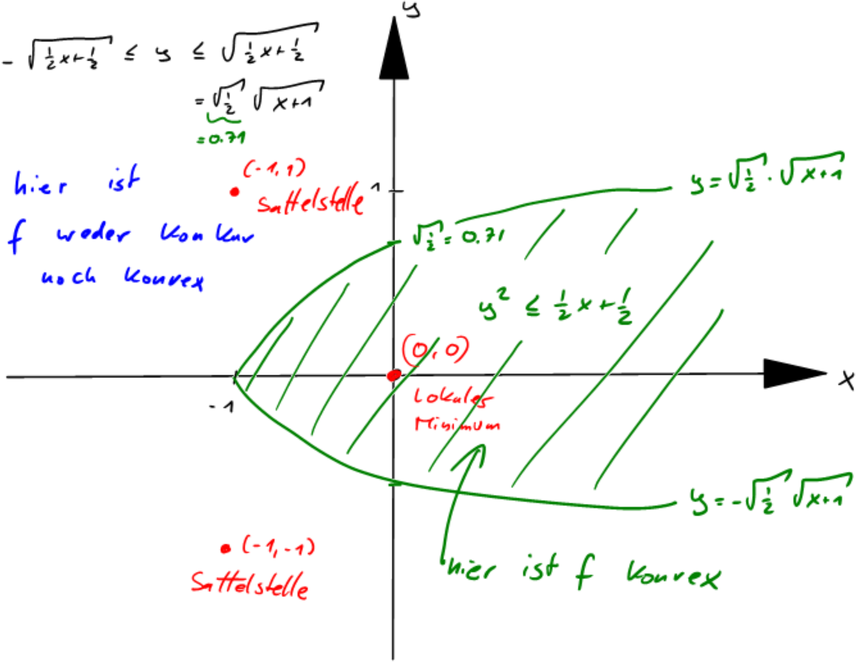
$f''_{11} \cdot f''_{22} = 2 \cdot (4x+4)$

$f''_{21} \cdot f''_{12} = 4y \cdot 4y = 16y^2$

$$
\begin{aligned}
& 2(4x+4) \geq 16y^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4x+4 \geq 8y^2 \\
\Leftrightarrow\ & x+1 \geq 2y^2 \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \geq y^2 \\
\Leftrightarrow\ & -\sqrt{\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}} \leq y \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$-\sqrt{\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}} \le y \le \sqrt{\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{=0.71}\sqrt{x+1}$$



Aufgabe 17.5 von Seite 831

Es sei $f(x, y, a) = ax^2 - 2x + y^2 - 4ay$, wobei a ein Parameter ist.

Bestimme für jedes feste $a \neq 0$ die einzige kritische Stelle $(x^*(a), y^*(a))$ für die Funktion f bezüglich (x, y).

Bestimme auch die Optimalwertfunktion $f^*(a) = f(x^*(a), y^*(a), a)$ und verifiziere das Envelope Theorem in diesem Fall.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax - 2 \overset{!}{=} 0 \iff ax - 1 = 0 \iff ax = 1$$

$$\iff x^*(a) = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4a \overset{!}{=} 0 \iff y - 2a = 0$$

$$\iff y^*(a) = 2a$$

$$f^*(a) = f\left(\frac{1}{a}, 2a, a\right) = a\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a}\right) + (2a)^2 - 4a \cdot 2a$$

$$= a\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 4a^2 - 8a^2 = -\frac{1}{a} - 4a^2$$

$$f(x,y,a) = ax^2 - 2x + y^2 - 4ay$$

$$\underline{x^*(a) = \frac{1}{a}} \qquad y^*(a) \underline{= 2a}$$

$$f^*(a) = -\frac{1}{a} - 4a^2 = -a^{-1} - 4a^2$$

$$\frac{df^*(a)}{da} = -(-1)\,a^{-2} - 4 \cdot 2\,a^1 = \underline{\underline{\frac{1}{a^2} - 8a}}$$

Envelope Theorem (in diesem Fall)

$$\frac{df^*(a)}{da} = \frac{\partial f(x^*, y^*, a)}{\partial a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = x^2 - 4y \;\underline{=}\; \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4(2a) = \underline{\underline{\frac{1}{a^2} - 8a}}$$