Übung zu Kapitel 17:[1]

Optimierung ohne Nebenbedingungen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

17.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen
- Aufgabe 17.1.1 von Seite 793

17.2 Hinreichende Bedingungen
- Aufgabe 17.2.2 von Seite 798

17.3 Lokale Extremstellen
- Aufgabe 17.3.2 von Seite 805

Klausuraufgaben
- Aufgabe 9 HT 2023
- Aufgabe 9 NT 2023
- Aufgabe 10 HT 2024
- Aufgabe 10 NT 2024

Aufgabe 17.1.1 von Seite 793

$f(x,y) = \underbrace{-2x^2+4x}\ \underbrace{-y^2+4y}\ -3$

Die Funktion f, die für alle (x, y) durch
$f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$ definiert ist, hat eine
Maximumstelle. Bestimme die entsprechenden Werte von x und y.

$f_1'(x,y) = -4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4 = 4x$

$\Rightarrow x = 1$

$f_2'(x,y) = -2y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4 = 2y$

$\Rightarrow y = 2$

$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|f''(x,y)| = (-4)\cdot(-2) - 0 \cdot 0$

$= 8 > 0$

$f_{11}'' = -4 < 0$

$\Rightarrow f''$ ist negativ definit $\Rightarrow f$ strikt konkav $\Rightarrow (1,2)$: Max.

H : Hessematrix (2×2)

$|H| > 0 \Rightarrow H$ definit

Falls zusätzlich $H_{11} > 0 \Rightarrow$ pos. def. $\Rightarrow$ str. konvex

$H_{11} < 0 \Rightarrow$ neg. def. $\Rightarrow$ str. konkav

$|H| \geq 0$ und $H_{11} \geq 0$, $H_{22} \geq 0$
pos. semidefinit $\Rightarrow$ schw. konvex

$|H| \geq 0$ und $H_{11} \leq 0$, $H_{22} \leq 0$
neg. semidefinit $\Rightarrow$ schw. konkav

$|H| < 0$ H indefinit.

Aufgabe 17.2.2 von Seite 798

Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Arten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten für die Produktion von x Einheiten der Sorte A und y Einheiten der Sorte B sind

$$c(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 514$$

Nehme an, dass das Unternehmen den Output zu einem Preis pro Einheit von 24 Euro für A und 12 Euro für B verkauft.

a) Finde die täglichen Produktionsniveaus x^* und y^*, die den Gewinn maximieren.

b) Es wird von dem Unternehmen verlangt, dass es genau ~~54~~ 55 Einheiten pro Tag von den beiden Arten zusammen produziert. Wie sieht der Produktionsplan jetzt aus?

a) $\pi(x,y) = 24x + 12y - c(x,y)$

wenn es ein inneres Gewinnmaximum gibt, dann muss dort $\pi'_1 = 0$ und $\pi'_2 = 0$ gelten.

$\pi'_1(x,y) = 24 - c'_1(x,y) \overset{!}{=} 0 \iff c'_1(x,y) = 24$

$\pi'_2(x,y) = 12 - c'_2(x,y) \overset{!}{=} 0 \iff c'_2(x,y) = 12$

$c(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 514$

$c'_1(x,y) = 4x - 4y - 40 \overset{!}{=} 24$

$\iff x - y - 10 = 6 \iff \boxed{x - y = 16}$ (I)

$c'_2(x,y) = -4x + 8y - 20 \overset{!}{=} 12$

$\iff -x + 2y - 5 = 3 \iff \boxed{-x + 2y = 8}$ (II)

(I + II): $\boxed{y = 24}$ $\rightarrow$ (I) $x - 24 = 16 \iff \boxed{x = 40}$

Hinreichende Bedingungen: Hessematrix π''_{11}

$$\pi''(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$|\pi''| = (-4)\cdot(-8) - 4\cdot 4 = 32 - 16 = 16 > 0$$

$\pi''_{11} = -4 < 0$ $\Rightarrow$ π'' negativ definit

$\Rightarrow$ π strikt konkav

$\Rightarrow$ stationäre Stelle ist Max-Stelle.

$x^* = 40,\ y^* = 24$

b) $\min\limits_{x,y} \; c(x,y)$ unter der Bedingung $x+y=55$
u. d. B.

Lösung durch Substitution: $x+y=55 \Leftrightarrow y=55-x$

$$\min_{x} \; c(x, 55-x)$$

Lösung durch Differential

$$d\,c(x,y) = c_1'(x,y)\cdot dx + c_2'(x,y)\cdot dy$$

im Minimum gilt $d\,c(x,y) = 0$

berechne dy mit $x+y=55$ wie folgt:

$$1 + \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

$$\Leftrightarrow dy = -dx$$

suche x, y so dass

$$c_1'(x,y)\cdot dx + c_2'(x,y)(-dx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1'(x,y) = c_2'(x,y)$$

zusätzlich $\quad x+y = 55$

$$4x - 4y - 40 = -4x + 8y - 20$$

$$x + y = 55$$

$$8x - 12y = 20 \quad | :4$$

$$x + y = 55 \quad | \cdot(-2)$$

$$2x - 3y = 5$$

$$-2x - 2y = -110$$

$$-5y = -105 \quad | :(-5)$$

$$x + y = 55$$

$$y = 21$$

$$x + 21 = 55 \Rightarrow x = 55 - 21 = 34$$

$(x, y) = (34, 21)$ minimiert $C(x, y)$ u.d.B. $x + y = 55$

Hinreichende Bedingungen Hessematrix

$C''(x, y)$

Beachte: $\pi(x, y) = 24x + 12y - C(x, y)$

$$\pi''(x, y) = -C''(x, y)$$

$\pi''(x, y)$ neg. def $\Rightarrow -\pi''(x, y)$ pos. def.

Aufgabe 17.3.2 von Seite 805

Betrachte die Funktion f, definiert für alle (x, y) durch
$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2$.

a) Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

b) Zeige, dass die kritischen Stellen $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ sind und klassifiziere diese.

Aufgabe 9 HT 2023

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = r^2$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = -(x+2)^2 - (y-1)^2 + 9$$

definiert ist, hat genau eine Extremstelle (x^*, y^*).

Wie lautet diese Extremstelle? Handelt es sich um eine Maximum- oder Minimumstelle?

a) $(x^*, y^*) = (2, -1)$, Maximumstelle
b) $(x^*, y^*) = (-2, 1)$, Maximumstelle ✓
c) $(x^*, y^*) = (-2, 1)$, Minimumstelle
d) $(x^*, y^*) = (2, -1)$, Minimumstelle

$$f'_1(x,y) = -2(x+2) \overset{!}{=} 0 \iff x = -2$$

$$f'_2(x,y) = -2(y-1) \overset{!}{=} 0 \iff y = 1$$

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|f''(x,y)| = (-2)\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 4 > 0$$

$$f''_{11} = -2 < 0 \qquad f'' \text{ negativ definit}$$

$$\Rightarrow (x,y) = (-2,1) \text{ ist Max-Stelle.}$$

Aufgabe 9 NT 2023

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^2 + 2x^2y + y^2$$

hat die stationäre Stelle $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Welche der folgenden Antworten ist richtig?

a) (x_0, y_0) ist eine Minimumstelle von f.

b) (x_0, y_0) ist eine Sattelstelle von f. ✓

c) Keine der anderen drei Aussagen ist richtig.

d) (x_0, y_0) ist eine Maximumstelle von f.

$$f(x,y) = 2x^2 + 2x^2y + y^2$$

$$f_1'(x,y) = 4x + 4xy \qquad f_2'(x,y) = 2x^2 + 2y$$

$$\Rightarrow \left| f''(x_0,y_0) \right| = 0 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -16$$

$\Rightarrow f''(x_0,y_0)$ indefinit

$\Rightarrow (x_0,y_0)$ Sattelpunkt.

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4+4y & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 4+4\cdot(-1) & 4\cdot 1 \\ 4\cdot 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

mit

$x_0 = 1,\ y_0 = -1$

Aufgabe 10 HT 2024

$\underline{y = \frac{3}{5}x}$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x, y) = (3x - 5y)^2, \ x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Die Funktion f hat unendlich viele stationäre Punkte. wahr

b) Der Punkt $(x, y) = (5, 3)$ ist ein stationärer Punkt der Funktion f. wahr

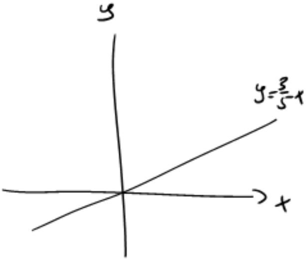
c) Der Punkt $(x, y) = (-15, -9)$ ist ein stationärer Punkt der Funktion f. wahr

d) Der Punkt $(x, y) = (3, 5)$ ist ein stationärer Punkt der Funktion f. falsch $\neq \frac{9}{5}$

$$f(x,y) = (3x-5y)^2$$

$$f'_1(x,y) = 2(3x-5y)\cdot 3 \overset{!}{=} 0$$

$$f'_2(x,y) = 2(3x-5y)\cdot(-5) \overset{!}{=} 0$$



$$\Rightarrow \quad 3x - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y = 3x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x$$

Aufgabe 10 NT 2024

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 36x - 18y + 7 \ , \ x,y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) Die Funktion f besitzt mindestens ein Minimum und mindestens ein Maximum.

b) Die Funktion f besitzt mindestens ein Maximum. ✓

c) Die Funktion f besitzt mindestens einen Sattelpunkt.

d) Die Funktion f besitzt mindestens ein Minimum.

aus a) folgt b) und d)

$\Rightarrow$ a) muss falsch sein.

Widerspruch zu
nur eine Aussage ist wahr.

$$f(x,y) = -3x^2 + 2xy - 3y^2 + 36x - 18y + 7$$

$$f_1'(x,y) = -6x + 2y + 36 \overset{!}{=} 0 \qquad |:2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-3x + y + 18 = 0}$$

$$f_2'(x,y) = 2x - 6y - 18 = 0 \qquad |:2$$

$$+ \quad \Leftrightarrow \boxed{x - 3y - 9 = 0} \qquad |\cdot 3$$

$$3x - 9y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow -8y - 9 = 0 \Leftrightarrow 8y = -9 \Leftrightarrow y = -\frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow x - 3\cdot\left(-\frac{9}{8}\right) - 9 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{27}{8} - \frac{72}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{72-27}{8} = \frac{45}{8}$$

$\Rightarrow$ eindeutige stationäre Stelle $(x,y) = \left(\frac{45}{8}, \frac{-9}{8}\right)$

Hessematrix

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|f''| = (-6)\cdot(-6) - 2\cdot 2 = 36 - 4 = 32 > 0$$

$\Rightarrow$ f'' neg. definit

$f''_{11} = -6 < 0$ $\Rightarrow$ f streng konkav

$\Rightarrow$ stat. Stelle ist max-Stelle.