Übung zu Kapitel 15:[1]

Partielle Ableitungen im Einsatz

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

15.1 Eine einfache Kettenregel
Aufgabe 15.1.1 von Seite 711

15.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie
Aufgabe 15.8 von Seite 767

15.6. Homogene Funktionen von zwei Variablen
Aufgabe 15.6.1 von Seite 734

15.9 Differentiale
Aufgabe 15.9.1 von Seite 754

Aufgabe 15.1.1 von Seite 711

Bestimme in den folgenden Fällen dz/dt, indem Du die Kettenregel verwendest. Überprüfe die Antworten, indem Du zuerst die Ausdrücke für x und y einsetzt und dann differenzierst.

a) $F(x, y) = x + y^2$, $x = t^2$, $y = t^3$

b) $F(x, y) = x^p y^q$, $x = at$, $y = bt$ mit $p + q = 1$

a) $F(x,y) = x + y^2 \Rightarrow F(t^2, t^3) = t^2 + (t^3)^2 = t^2 + t^6$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2t + 6t^5$$

(Totale Ableitung)

Mit Kettenregel: $x(t) = t^2$, $x'(t) = 2t$, $y(t) = t^3$, $y'(t) = 3t^2$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F_1'(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + F_2'(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= 1 \cdot x'(t) + 2y \cdot y'(t)$$

$$= 2t + 2 \cdot t^3 \cdot 3t^2$$

$$= 2t + 6t^5$$

b) $F(x,y) = x^p y^q$, $\quad x(t) = a \cdot t$, $\quad y(t) = b \cdot t$, $\quad \underline{p+q=1}$

$$\Rightarrow F(at, bt) = (at)^p (bt)^q = a^p b^q \cdot t^{p+q} \overset{?}{=} a^p b^q \cdot t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = a^p b^q$$

Mit Kettenregel: $\quad x(t) = a \cdot t \quad\quad y(t) = b \cdot t$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x'(t) = a \quad\quad\quad y'(t) = b$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= F_1'(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + F_2'(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\
&= p \cdot x^{p-1} y^q \cdot a + q \cdot x^p y^{q-1} \cdot b \\
&= a \cdot p \cdot a^{p-1} \cdot t^{p-1} \cdot b^q \cdot t^q + b \cdot q \cdot a^p \cdot t^p \cdot b^{q-1} \cdot t^{q-1} \\
&= a^p \cdot p \cdot b^q \cdot t^{\overbrace{p-1+q}^{0}} + a^p \cdot q \cdot b^q \cdot t^{\overbrace{q-1+p}^{0}} \\
&= a^p \cdot p \cdot b^q + a^p \cdot q \cdot b^q = \overbrace{(p+q)}^{1} \cdot a^p \cdot b^q = a^p \cdot b^q
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.8 von Seite 767

Bestimme die Grenzrate der Substitution von y bezüglich x (die Steigung der Höhenlinie) für

a) $U(x, y) = 2x^{0.4}y^{0.6}$
b) $U(x, y) = xy + y$
c) $U(x, y) = 10(x^{-2} + y^{-2})^{-4}$

Laut VL:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_1'(x,y)}{f_2'(x,y)}$$

$$a)\ -\frac{U_1'(x,y)}{U_2'(x,y)} = -\frac{\cancel{2}\cdot 0.4 \cdot x^{-0.6}\, y^{0.6}}{\cancel{2}\cdot 0.6 \cdot x^{0.4}\, y^{-0.4}} = -\frac{2}{3}\,\frac{y}{x}$$

$$b)\ -\frac{U_1(x,y)}{U_2'(x,y)} = -\frac{y}{x+1}$$

KR

$$c)\ -\frac{U_1(x,y)}{U_2'(x,y)} = -\frac{\cancel{10}\,\cancel{(-4)}\,\cancel{(-2)}\,x^{-3}\cdot\cancel{[x^{-2}+y^{-2}]^{-5}}}{\cancel{10}\,\cancel{(-4)}\,\cancel{(-2)}\,y^{-3}\cdot\cancel{[x^{-2}+y^{-2}]^{-5}}} = -\frac{y^3}{x^3}$$

Aufgabe 15.6.1 von Seite 734

Zeige, dass $f(x, y) = x^4 + x^2y^2$ homogen vom Grad 4 ist.

$$
\begin{aligned}
f(tx, ty) &= t^4x^4 + t^2x^2t^2y^2 \\
&= t^4x^4 + t^4x^2y^2 \\
&= t^4(x^4 + x^2y^2) \\
&= t^4 f(x, y)
\end{aligned}
$$

Allgemein $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

$\Rightarrow$ homogen vom Grad n!

Aufgabe 15.9.1 von Seite 754

Bestimme das Differential von $z = xy^2 + x^3 = f(x,y)$

$dz = f_1'(x,y) \cdot dx + f_2'(x,y)\, dy$ (Definition)

$= [y^2 + 3x^2] \cdot dx + [2xy] \cdot dy$