Übung zu Kapitel 15:[1]

Partielle Ableitungen im Einsatz

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

15.1 Eine einfache Kettenregel
Aufgabe 15.1.1 von Seite 711

15.6. Homogene Funktionen von zwei Variablen
Aufgabe 15.6.1 von Seite 734

15.9 Differentiale
Aufgabe 15.9.1 von Seite 754

Klausuraufgaben
Aufgabe 8 HT 2024
Aufgabe 9 HT 2024
Aufgabe 9 NT 2024

Aufgabe 15.1.1 von Seite 711

Bestimme in den folgenden Fällen dz/dt, indem Du die Kettenregel verwendest. Überprüfe die Antworten, indem Du zuerst die Ausdrücke für x und y einsetzt und dann differenzierst.

a) $F(x,y) = x + y^2$, $x = t^2$, $y = t^3$

b) $F(x,y) = x^p y^q$, $x = at$, $y = bt$ mit $p + q = 1$

falls $x = g(t)$, $y = h(t)$

$$\frac{d\,F(x,y)}{dt} = F_1'(x,y) \cdot g'(t) + F_2'(x,y) \cdot h'(t)$$

a) $F_1'(x,y) = 1$ $\quad F_2'(x,y) = 2 \cdot y$

$x'(t) = 2t$ $\quad y'(t) = 3t^2$

$$\frac{dF}{dt} = 1 \cdot 2t + 2 \cdot y \cdot 3t^2 = 2t + 6yt^2$$

$$= 2t + 6 \cdot t^3 \cdot t^2 = \underline{2t + 6 \cdot t^5}$$

$$F(t) = t^2 + (t^3)^2 = t^2 + t^6$$

$$F'(t) = 2t + 6t^5$$

---

b) $F(x,y) = x^p y^q$, $x = at$ $y = bt$ $p+q=1$

$F_1'(x,y) = p x^{p-1} y^q$ $F_2'(x,y) = x^p q y^{q-1}$ $\Leftrightarrow p-1 = -q$

$\Leftrightarrow q-1 = -p$

$x'(t) = a$ $y'(t) = b$

$\Leftrightarrow 1-q = p$

$\Leftrightarrow 1-p = q$

$$\frac{dF}{dt} = p x^{p-1} y^q \cdot a + x^p q y^{q-1} \cdot b$$

$$= a \cdot p x^{-q} y^q + b q x^p y^{-p}$$

$$= a \cdot p (at)^{-q} (bt)^q + b \cdot q (at)^p (bt)^{-p}$$

$$= a \cdot p a^{-q} t^{-q} \cdot b^q t^q + b q a^p t^p b^{-p} t^{-p}$$

$$= \underline{a} \cdot p \cdot \underline{a}^{-q} \cdot b^q + \underline{b} \cdot q \cdot a^p \cdot \underline{b}^{-p}$$

$$= a^{1} \cdot a^{-q} \cdot p \cdot b^{q} + b^{1} \cdot b^{-p} \cdot q \cdot a^{p}$$

$$= a^{1-q} \cdot p \cdot b^{q} + b^{1-p} \cdot q \cdot a^{p}$$

$$= \underline{a^{p}} \cdot p \cdot \underline{b^{q}} + \underline{b^{q}} \cdot q \cdot \underline{a^{p}}$$

$$= a^{p} \cdot b^{q} (p + q) = \underline{a^{p} \cdot b^{q}}$$

---

noch b)

$$F(x,y) = x^{p} y^{q} \qquad x = a \cdot t \qquad y = b \cdot t \qquad p+q=1$$

$$F(t) = (a \cdot t)^{p} \cdot (b \cdot t)^{q}$$

$$= a^{p} \cdot t^{p} \cdot b^{q} \cdot t^{q} = t^{p} \cdot t^{q} \cdot a^{p} \cdot b^{q}$$

$$= t^{p+q} \cdot a^{p} \cdot b^{q} = t \cdot a^{p} b^{q} = t \cdot \overbrace{F(a,b)}^{\text{konstante}}$$

$$F'(t) = \underline{a^{p} b^{q}}$$

Aufgabe 15.6.1 von Seite 734

Zeige, dass $f(x, y) = x^4 + x^2y^2$ homogen vom Grad 4 ist.

$$
\begin{aligned}
f(tx, ty) &= (t\cdot x)^4 + (t\cdot x)^2 \cdot (t\cdot y)^2 \\
&= t^4 \cdot x^4 + t^2 \cdot x^2 \cdot t^2 \cdot y^2 \\
&= t^4 \cdot x^4 + t^2 \cdot t^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \\
&= t^4 x^4 + t^{2+2} \cdot x^2 \cdot y^2 \\
&= t^4 x^4 + t^4 \cdot x^2 \cdot y^2 \\
&= t^4 (x^4 + x^2 \cdot y^2) \\
&= t^4 f(x, y)
\end{aligned}
$$

Grad der Homogenität.

Aufgabe 15.9.1 von Seite 754

Bestimme das Differential von $z = xy^2 + x^3$.

Stelle mir vor: $x(t)$, $y(t)$ $\Rightarrow z(t) = x(t)\cdot(y(t))^2 + (x(t))^3$

$$\frac{dz}{dt} = y^2 \cdot \frac{dx}{dt} + x2y \cdot \frac{dy}{dt} + 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

Differential

$$dz = y^2 \cdot dx + 2xy\,dy + 3x^2\,dx$$

$$= (3x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

$$dz = z_1' \cdot dx + z_2'\,dy$$

$$z_1' = y^2 + 3x^2 \qquad z_2' = x2y$$

$$\Rightarrow dz = (y^2 + 3x^2)\,dx + 2xy\,dy$$

Aufgabe 8 HT 2024

Es sei $||\binom{x}{y}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge des Vektors $\binom{x}{y}$.

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = ||\binom{x}{y}||$ homogen und falls ja von welchem Grad?

a) f ist homogen vom Grad 2.

b) f ist homogen vom Grad 1.

c) f ist homogen vom Grad $\frac{1}{2}$.

d) f ist nicht homogen.

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} t\cdot x \\ t\cdot y \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{(t\cdot x)^2 + (t\cdot y)^2} \\
&= \sqrt{t^2\cdot x^2 + t^2\cdot y^2} \\
&= \sqrt{t^2(x^2+y^2)} \\
&= \sqrt{t^2}\;\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= |t| \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \\
&\overset{t>0}{=} t^1 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}
$$

"Norm"
hier: Euklidischer Abstand

$\|\cdot\|$ ist homogen vom Grad 1

Aufgabe 9 HT 2024

Bestimmen sie die Steigung $\frac{dy}{dx}$ der Höhenlinie der Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ im Punkt $(x, y) = (2, 3)$ mit

$$f(x, y) = \sqrt{x \cdot y^2}$$

$$\tilde{f}(x,y) = x \cdot y^2$$

$$\tilde{\tilde{f}}(x,y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\tilde{\tilde{f}}(x,y)\right)^3 = x \cdot y^2$$

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$

b) $\frac{dy}{dx} = -3$

c) $\frac{dy}{dx} = -1$

d) $\frac{dy}{dx} = -2$

Höhenlinie durch $(2,3)$:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y^2} = \sqrt{x\cdot y^2} = \sqrt{2\cdot 3^2} = \sqrt{2}\cdot 3 = c$$

Steigung einer Höhenlinie von $f(x,y)$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1'(x,y)}{f_2'(x,y)} \quad , \text{falls } f_2'(x,y) \neq 0$$

$$f(x,y) = \sqrt{x\cdot y^2}$$

$$f_1'(x,y) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\dots}}\cdot y^2 \qquad f_2'(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\dots}}\cdot x\cdot 2y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{\dots}}\cdot y^2}{\frac{1}{2\sqrt{\dots}}\,2xy} = -\frac{y}{2x}\Bigg|_{(x,y)=(2,3)} = -\frac{3}{2\cdot 2} = -\frac{3}{4}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y^2}$$

$$f_1'(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{y^2} \qquad f_2'(x,y) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2}} \cdot 2y$$

$$-\frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{y^2}}{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2}} \cdot 2y} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{y^2}}{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}y}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} \cdot \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{y^2} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{2x} \frac{y^2}{y} = -\frac{y}{2x}$$

$$f(x,y) = h(g(x,y))$$

$$f_1'(x,y) = h'(g(x,y)) \cdot g_1'(x,y)$$

$$f_2'(x,y) = h'(g(x,y)) \cdot g_2'(x,y)$$

$$-\frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{\cancel{h'} \cdot g_1'}{\cancel{h'} \cdot g_2'} = -\frac{g_1'}{g_2'}$$

$$\tilde{f}(x,y) = x \cdot y^2$$

$$\tilde{f}_1'(x,y) = y^2 \qquad \tilde{f}_2'(x,y) = x \cdot 2y$$

$$\Rightarrow -\frac{\tilde{f}_1'}{\tilde{f}_2'} = -\frac{y^2}{2xy} = -\frac{y}{2x} = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

Aufgabe 9 NT 2024

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x, y) = (x - 5)^2 - (y - 7)^2 \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Gleichungen in den Variablen x, y und z beschreibt die Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x, y)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (5, 7)$?

a) $z = 0$

b) $z = 10 \cdot (x - 5) - 14(y - 7)$

c) $z = 10 \cdot (x - 5) + 14(y - 7)$

d) $z = -10 \cdot (x - 5) + 14(y - 7)$

Falls Graph = Ebene $\Rightarrow$ $g(x,y)$ linear:

$$g(x,y) = ax + by + c$$

Ebene ist tangential zu Graph von f im Punkt $(5,7)$

$\Rightarrow$ 3 Bedingungen:

1. $g(5,7) = f(\overset{x}{5},\overset{y}{7})$
2. $g_1'(5,7) = f_1'(5,7)$
3. $g_2'(5,7) = f_2'(5,7)$

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad a\cdot 5 + b\cdot 7 + c = (5-5)^2 - (7-7)^2 = 0\\
&2.\quad a = 2(\overset{5}{x}-5) = 0\\
&3.\quad b = -2(\overset{7}{y}-7) = 0
\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&a=b=c=0\\ &\Rightarrow g(x,y)=0\\ &\text{für alle } x,y\end{aligned}$$

Lineare Approximation

$$z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=0} + \underbrace{f_1'(x_0, y_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{f_2'(x_0, y_0)}_{=0}(y - y_0) = 0$$