Übungen 9 & 10 zu Kapitel 14:[1]

Funktionen mehrerer Variablen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in diesen Übungen:

Aufgabe 14.1.4 von Seite 650

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$. $= (x+y)^2$

a) Bestimme $f(-1, 2)$, $f(a, a)$ und $f(a + h, b) - f(a, b)$.

b) Zeige, dass $f(2x, 2y) = 2^2 f(x, y)$ und
dass $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ für alle t.

a) $f(\overset{x}{-1}, \overset{y}{2}) = (\overset{x}{-1} + \overset{y}{2})^2 = 1^2 = 1$

$f(\overset{x}{a}, \overset{y}{a}) = \overset{x}{a}^2 + 2 \cdot \overset{x}{a} \cdot \overset{y}{a} + \overset{y}{a}^2 = 4 \cdot a^2$

$f(\overset{x}{a} + \overset{\Delta x}{h}, \overset{y}{b}) - f(\overset{x}{a}, \overset{y}{b}) = (a+h)^2 + 2(a+h)b + b^2$
$- \left((a)^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\right)$

$= \cancel{a^2} + 2ah + h^2 + \cancel{2ab} + 2hb + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} - \cancel{2ab} - \cancel{b^2}$

$= 2ah + h^2 + 2hb = h(2a + h + 2b)$

$\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y \right]$

b)

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

$$f(2x, 2y) = (2x + 2y)^2$$

$$= \left(2(x+y)\right)^2$$

$$= 2^2 \cdot (x+y)^2$$

$$= 4 \cdot \underbrace{(x+y)^2}_{f(x,y)} = 4 \cdot f(x,y)$$

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = (t \cdot x + t \cdot y)^2$$

$$= \left(t \cdot (x+y)\right)^2$$

$$= t^2 \cdot (x+y)^2 = t^2 \cdot f(x,y)$$

Aufgabe 14.1.6 von Seite 650

Untersuche die Definitionsbereiche der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen und zeichne diese dann in der *xy*-Ebene.

a) $\frac{x^2+y^3}{y-x+2}$

b) $\sqrt{2-(x^2+y^2)}$

c) $\sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$

a) Der Nenner $y - x + 2$ darf nicht gleich null sein!

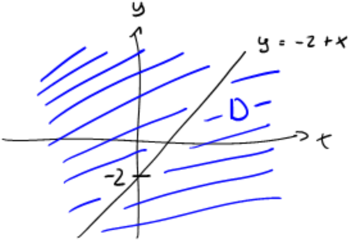
in x-y-Ebene

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x + 2 \neq 0 \}$$

für die gilt

$$y - x + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \neq -2 + x$$



b) Der Term unter der Wurzel $2-(x^2+y^2)$ darf nicht negativ sein!

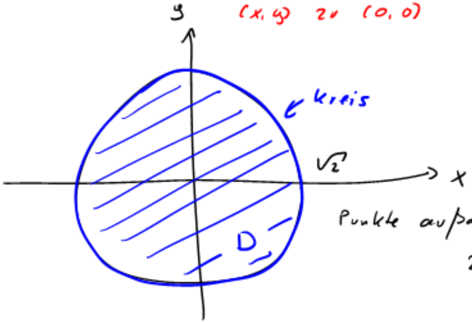
$$2-(x^2+y^2) \geq 0 \iff 2 \geq x^2+y^2$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 2\}$

$$\iff \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 0} \leq \underbrace{2}_{\geq 0}$$

$$\iff \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}$$

Entfernung von (x,y) zu $(0,0)$



Punkte außerhalb des Kreises:

$2-(x^2+y^2) < 0$

c) $\sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$

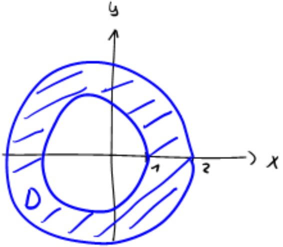
Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ sein!

$(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1) \geq 0$ falls

$[4-x^2-y^2 \geq 0$ und $x^2+y^2-1 \geq 0]$

oder

$[4-x^2-y^2 \leq 0$ und $x^2+y^2-1 \leq 0]$



$\Rightarrow$ $4 \geq x^2+y^2$ und $x^2+y^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $2 \geq \sqrt{x^2+y^2}$ und $\sqrt{x^2+y^2} \geq 1$

$\Rightarrow$ $4 \leq x^2+y^2$ und $x^2+y^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow$ $2 \leq \sqrt{x^2+y^2}$ und $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$

Kein Punkt (x,y) kann diese Bedingungen gleichzeitig erfüllen.

Aufgabe 14.2.4 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von:

Lineare Funktion

a) $z = 3x + 4y$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial z}{\partial x} = z_1' = 3$, $z_2' = 4$

a) $z_{11}'' = 0$ $z_{21}'' = 0$

$z_{12}'' = 0$ $z_{22}'' = 0$

$\boxed{b)}$ $z = x^3y^2$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial z}{\partial x} = z_1' = 3x^2 \cdot y^2$, $z_2' = x^3 \cdot 2y = 2 \cdot x^3 \cdot y$

$\boxed{c)}$ $z = x^5 - 3x^2y + y^6$

b)

$z_{11}'' = 3 \cdot 2x \cdot y^2 = 6xy^2$

$z_{21}'' = 3 \cdot x^2 \cdot 2y = 6 \cdot x^2 \cdot y$

$z_{12}'' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y = 6 \cdot x^2 \cdot y$

$z_{22}'' = 2 \cdot x^3$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial z_1'}{\partial y} = z_{21}''$$

c)

$z_1' = 5x^4 - 3 \cdot 2x \cdot y = 5x^4 - 6xy$

$z_2' = -3x^2 + 6y^5$

$z_{11}'' = 20x^3 - 6y$ $z_{21}'' = -6x$

$z_{12}'' = -6x$ $z_{22}'' = 30y^4$

Aufgabe 14.2.5 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für jede der folgenden Funktionen:

a) $z = x^2 + e^{2y}$

b) $z = y \ln(x)$

c) $z = xy^2 - e^{xy}$

d) $z = x^y$

a) $z = x^2 + e^{2y}$

$z_1' = 2x$

$z_2' = e^{2 \cdot y} \cdot 2$

Kettenregel: $\Big(f(g(y))\Big)' = f'(g(y)) \cdot g'(y)$

für e^{2y}: $f(g) = e^g \rightsquigarrow f'(g) = e^g$

$g(y) = 2 \cdot y \rightsquigarrow g'(y) = 2$

$z_{11}'' = 2 \qquad z_{21}'' = 0$

$z_{12}'' = 0 \qquad z_{22}'' = 2 \cdot e^{2y} \cdot 2 = 4 \cdot e^{2y}$

b) $z = y \cdot \ln(x)$

$$z'_1 = y \cdot \frac{1}{x} = y \cdot x^{-1}$$

$$z'_2 = \ln(x)$$

$$z''_{11} = y \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{y}{x^2} \qquad z''_{12} = \frac{1}{x}$$

$$z''_{21} = x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad z''_{22} = 0$$

Hessematrix

$$z'' = \begin{pmatrix} z''_{11} & z''_{21} \\ z''_{12} & z''_{22} \end{pmatrix}$$

c) $z = x \cdot y^2 - e^{xy}$

$$z_1' = y^2 - y e^{xy}$$

$$z_2' = x \cdot 2y - x e^{xy}$$

$$z_{11}'' = -y \cdot y e^{xy} = -y^2 e^{xy}$$

Produktregel

$$z_{21}'' = 2y - (1 \cdot e^{xy} + y \cdot x e^{xy})$$

Produktregel

$$z_{12}'' = 2y - (1 e^{xy} + x \cdot y e^{xy})$$

$$z_{22}'' = 2x - x \cdot x e^{xy}$$
$$= 2x - x^2 e^{xy}$$

d) $z = x^y$

zur Erinnerung

$f(x) = x^2 \leadsto f'(x) = 2x$

$f(x) = 2^x \leadsto f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x$

$z_1' = y \cdot x^{y-1}$

$z_2' = \ln(x) \cdot x^y$

$z_{11}'' = y \cdot (y-1) x^{y-2}$

$z_{21}'' = 1 \cdot x^{y-1} + y \cdot \ln(x) \cdot x^{y-1}$

$z_{12}'' = \frac{1}{x} \cdot x^y + \ln(x) \cdot y \cdot x^{y-1}$

$x^{-1} \cdot x^y$

x^{-1+y}

x^{y-1}

$z_{22}'' = \ln(x) \cdot \ln(x) \cdot x^y$

$= (\ln(x))^2 x^y$

Aufgabe 14.3.5 von Seite 664

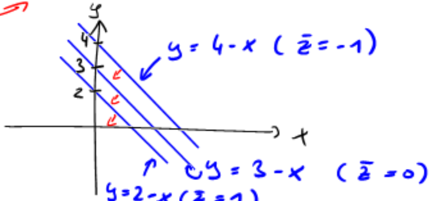
Zeichne für die folgenden Funktionen eine Reihe von Höhenlinien in ein x-y-Diagramm:

- $z = 3 - x - y$
- $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

Für eine Höhenlinie gilt: z konstant.

$$\bar{z} = 3 - x - y \iff y = 3 - x - \bar{z} = \overbrace{3 - \bar{z}}^{\text{Achsenabschnitt}} \; -1\,x$$

Steigung



$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} = \sqrt{3 - (x^2 + y^2)}$

Höhenlinie : $\bar{z}$

$\bar{z} = \sqrt{3 - x^2 - y^2} \Rightarrow \bar{z}^2 = 3 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow y^2 = 3 - x^2 - \bar{z}^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{3 - x^2 - \bar{z}^2}$

z ist konstant, falls $\sqrt{3 - (x^2 + y^2)} = \bar{z}$ konstant

$\Leftrightarrow \quad 3 - (x^2 + y^2) = \bar{z}^2$ konstant

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2) = 3 - \bar{z}^2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \underbrace{\sqrt{3 - \bar{z}^2}}_{\text{Radius}}$

$\rightarrow$ Mittelpunkt: $(0, 0)$

Allgemeine Kreisgleichung:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Kreis mit Mittelpunkt (a,b) und Radius r

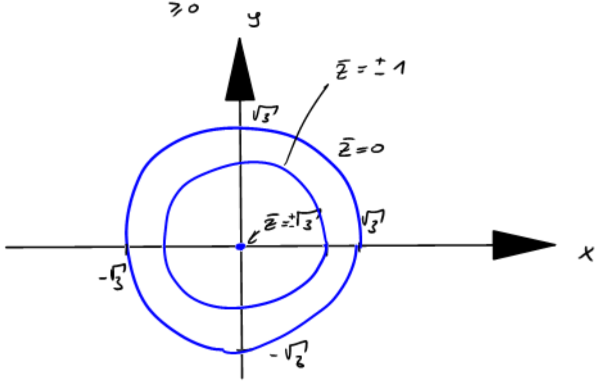
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\underbrace{3 - z^2}_{\geq 0}} \geq 0$$

funktioniert nur für $z^2 \leq 3 \Leftrightarrow |z| \leq \sqrt{3}$

$z = 1 \Rightarrow z^2 = 1$

$\Rightarrow 3 - z^2 = 2$

$= \sqrt{3 - z^2} = \sqrt{2}$



Aufgabe 14.3.8 von Seite 665

Nehme an, dass $F(x, y)$ eine Funktion ist, von der wir nur wissen, dass

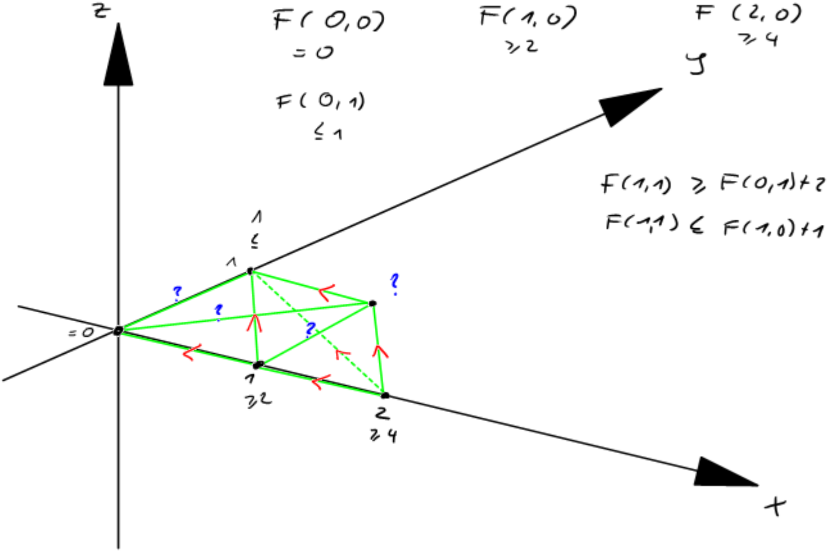
i) $F(0,0) = 0$

ii) $F_1'(x, y) \geq 2$ für alle (x, y)

iii) $F_2'(x, y) \leq 1$ für alle (x, y)

Was kann über die relativen Größen von $F(0,0)$, $F(1,0)$, $F(2,0)$, $F(0,1)$ und $F(1,1)$ gesagt werden?

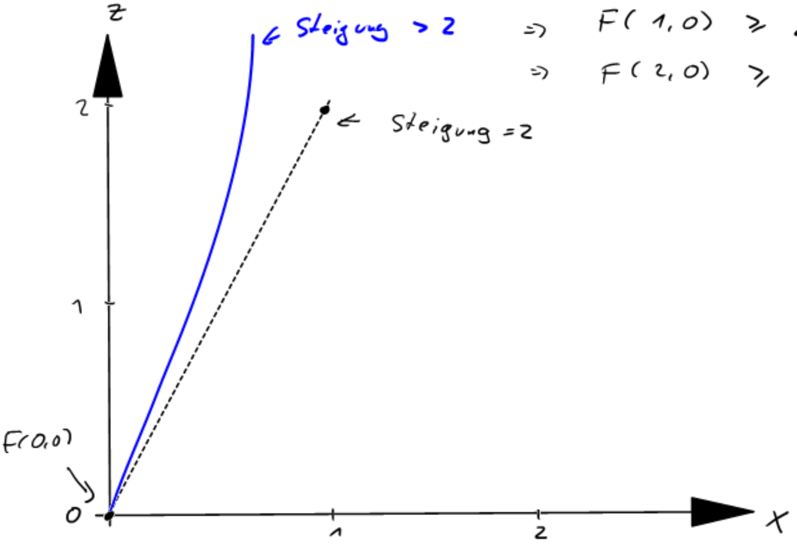
Schreibe alle Ungleichungen auf, die zwischen diesen Zahlen gelten müssen.

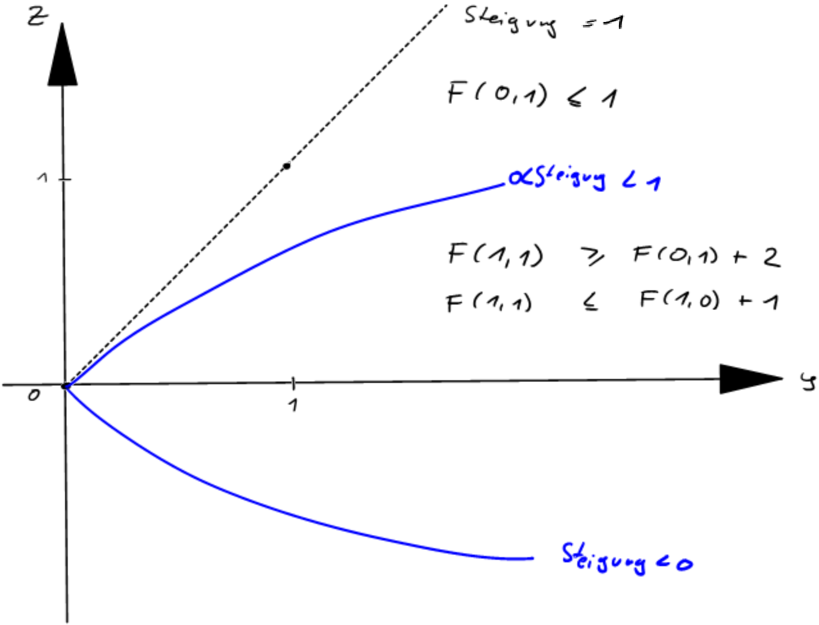


$F_1'(x,y) \geq 2 > 0 \rightarrow$ F ist streng monoton wachsend in x.

$\Rightarrow \quad F(1,0) \geq 2$

$\Rightarrow \quad F(2,0) \geq 4$





z
Steigung = 1
F(0,1) ≤ 1
1
Steigung < 1
F(1,1) ≥ F(0,1) + 2
F(1,1) ≤ F(1,0) + 1
0
1
y
Steigung < 0

Aufgabe zu Höhenlinien

$\sqrt[3]{a} : \quad \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$

Es seien die Nutzenfunktionen u und v durch

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}$$

und

$$v(x, y) = \ln(x) + 2\ln(y)$$

gegeben, wobei $x, y > 0$.

Begründe, warum diese beiden Funktionen das gleiche System von Höhenlinien haben: Wenn zwei Paare (x_0, y_0) und (x_1, y_1) auf der gleichen Höhenlinie von u liegen, dann müssen sie auch auf der gleichen Höhenlinie von v liegen (und umgekehrt).

Im Allgemeinen gilt, falls $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend, dann haben $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und v mit $v(x, y) = g(u(x, y))$ die gleichen Höhenlinien.

Höhenlinie $z = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$ der Höhe $c \geq 0$

Alle Paare (x, y) für die gilt $x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = c \quad | (\,)^3$

$$\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = c^3$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = x^{\frac{1}{3} \cdot 3} \cdot y^{\frac{2}{3} \cdot 3} = x \cdot y^2 = c^3 \quad | \ln(\cdot)$$

$$\ln(x \cdot y^2) = \ln(c^3)$$

$$\ln(x) + \ln(y^2) = \ln(c^3)$$

$$\underbrace{\ln(x) + 2\ln(y)}_{v(x,y)} = \ln(c^3)$$

Aufgabe 14.8.2 von Seite 694

Für welche Werte der Konstante a ist die folgende Funktion konkav / konvex?

$$f(x,y) = -6x^2 + (2a+4)xy - y^2 + 4ay$$

$f_1'(x,y) = -12x + (2a+4)y$

$f_2'(x,y) = (2a+4)x - 2y + 4a$

$f_{11}''(x,y) = -12 < 0$

$\Rightarrow$ f ist nicht konvex

$f_{21}'' = 2a+4$

$f_{12}'' = 2a+4$

$f_{22}'' = -2 < 0$

$f_{11}'' \cdot f_{22}'' \geq f_{21}'' \cdot f_{12}''$

$(-12) \cdot (-2) \geq (2a+4)(2a+4)$

$\Leftrightarrow 24 \geq (2a+4)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{24} \geq |2a+4|$

$\sqrt{4 \cdot 6} = \cancel{2}\sqrt{6} \geq \cancel{2}|a+2|$

$\sqrt{6} \geq |a+2|$

$\Leftrightarrow -2-\sqrt{6} \leq a \leq -2+\sqrt{6}$

f eine Funktion mit 2 Variablen (x,y)

zweimal differenzierbar

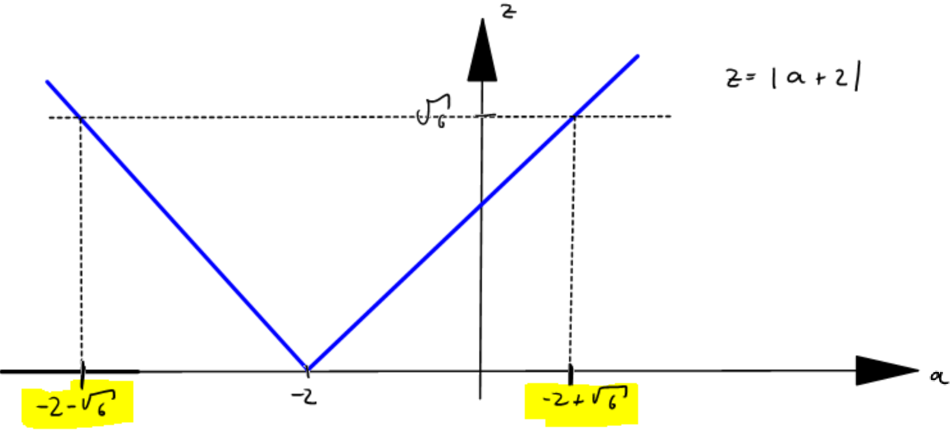
Hessematrix $f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{21}(x,y) \\ f''_{12}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix}$

f ist (streng) konkav, falls

$f''_{11}, f''_{22} \leq (<) 0$ und $\underline{f''_{11} \cdot f''_{22}} \geq (>) \underline{f''_{12} \cdot f''_{21}}$

f ist (streng) konvex, falls

$f''_{11}, f''_{22} \geq (>) 0$ und $\underline{f''_{11}\, f''_{22}} \geq (>) \underline{f''_{12} \cdot f''_{21}}$



$a > -2 \Rightarrow |a+2| = a+2 \leq \sqrt{6} \Rightarrow a \leq -2+\sqrt{6}$

$a < -2 \Rightarrow |a+2| = -(a+2) \leq \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow -a-2 \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow -\sqrt{6}-2 \leq a$

$f(x,y) = -6x^2 + (2a+4)xy - y^2 + 4ay$

ist (streng) konkav, falls $-2-\sqrt{6} \leq (<) \; a \leq (<) \; -2+\sqrt{6}$

andernfalls ist f weder konkav noch konvex.

Aufgabe zu perfekten Substituten

Ein Nutzenfunktion für perfekte Substitute laute

$$u(x, y) = a \cdot x + b \cdot y$$

mit $a, b > 0$.

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?

$U_1' = a \qquad U_2' = b$

$U_{11}'' = U_{21}'' = U_{12}'' = U_{22}'' = 0$

Alle Ungleichungen für Konvexität und Konkavität sind erfüllt.

Aufgabe zu einer quasilinearen Nutzenfunktion

Eine quasilineare Nutzenfunktion laute

$$u(x, y) = v(x) + b \cdot y$$

mit $v' > 0, v'' < 0$ und $b > 0$.

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?

$U_1'(x) = V'(x) \quad , \quad U_2' = b$

$U_{11}''(x) = \underbrace{V''(x)}_{<0}$

$\rightarrow$ U ist nicht konvex

$U_{12}'' = 0$

$U_{21}'' = 0$

$U_{22}'' = 0 \leq 0$

$U_{11}'' \cdot U_{22}'' \geq U_{21}'' \, U_{12}''$

$\underbrace{V'' \cdot 0}_{=0} \geq \underbrace{0 \cdot 0}_{=0}$

$\Rightarrow$ U ist schwach konkav