Übung zu Kapitel 13:[1]

13 Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

13.1 Determinanten der Ordnung 2
- Aufgabe 13.1.1
- Aufgabe 13.1.3

13.2 Determinanten der Ordnung 3x3
- Aufgabe 13.2.1

13.6 Die Inverse einer Matrix
- Aufgabe 13.6.3

Klausuraufgaben
- Aufgabe 14 HT 2024
- Aufgabe 14 NT 2024

Zusatzaufgabe

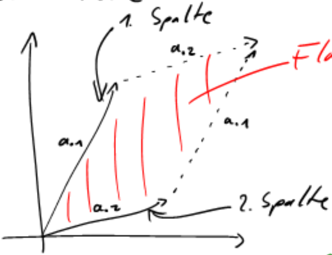
Aufgabe 13.1.1

Berechne folgende Determinanten:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 8 & -x \end{vmatrix}$$

$$d)\ \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} \qquad e)\ \begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix}$$

Determinante



Fläche $= |\det(A)|$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) := |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \underline{3 \cdot 6} - \underline{0 \cdot 2} = 18 - 0 = 18$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

$$|B| = a \cdot b - a \cdot b = 0$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 8 & -x \end{pmatrix}$$

$$|C| = (2-x)(-x) - 1 \cdot 8 = \overbrace{1 - 2x + x^2}^{(1-x)^2} - 8 - 1$$

$$= (1-x)^2 - 9 = (1 - x - 3)(1 - x + 3) = -(x+2)(4-x)$$

d)

$$D = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|D| &= (a+b)(a+b) - (a-b)(a-b) \\
&= (a+b)^2 - (a-b)^2 \\
&= (\cancel{a}+b-(\cancel{a}-b))(a+\cancel{b}+a-\cancel{b}) \\
&= 2b \cdot 2a = 4ab
\end{aligned}$$

e)

$$E = \begin{pmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
|E| &= \underbrace{3^t}_{3^{t-1}\cdot 3} \cdot 2^{t-1} - \underbrace{2^t}_{2^{t-1}\cdot 2} \cdot 3^{t-1} \\
&= 2^{t-1} \cdot 3^{t-1} (3-2) = 6^{t-1} > 0
\end{aligned}$$

Einschub Quadratische Form:

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 \cdot x_2 + a_{22} x_2^2$$

aus a) $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + (6+0) x_1 x_2 + 2x_2^2$$

$$Q_1' = 6x_1 + 6x_2 \quad , \quad Q_2' = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11}'' & Q_{12}'' \\ Q_{21}'' & Q_{22}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}} + \overset{A'}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 13.1.3

Verwende die Cramer'sche Regel, um die folgenden Gleichungssysteme nach x und y aufzulösen. Überprüfe die Antworten durch Einsetzen.

$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $|A| = 3\cdot(-2)-(-1)\cdot 1 = -6+1 = -5$

$\boxed{a)}$
$$\begin{aligned} 3x &- 1y &= 8\\ 1x &- 2y &= 5 \end{aligned}$$

$x^* = \frac{\begin{vmatrix}8 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}}{-5} = \frac{8\cdot(-2)-(-1)\cdot 5}{-5} = \frac{-16+5}{-5} = \frac{11}{5}$

$y^* = \frac{\begin{vmatrix}3 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}}{-5} = \frac{3\cdot 5 - 8\cdot 1}{-5} = \frac{15-8}{-5} = -\frac{7}{5}$

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $|A| = 1\cdot(-2)-3\cdot 3 = -2-9 = -11$

$4 + 3(-1) = 4-3 = 1$

$\boxed{b)}$
$$\begin{aligned} x &+ 3y &= 1\\ 3x &- 2y &= 14 \end{aligned}$$

$12 + 2 = 14$ ✓

$x^* = \frac{\left|\begin{pmatrix}1 & 3\\ 14 & -2\end{pmatrix}\right|}{-11} = \frac{1\cdot(-2)-3\cdot 14}{-11} = \frac{-2-42}{-11} = \frac{-44}{-11} = 4$

$y^* = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 14\end{vmatrix}}{-11} = \frac{1\cdot 14 - 1\cdot 3}{-11} = \frac{11}{-11} = -1$

$A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ $|A| = a\cdot a-(-b)\cdot b = a^2+b^2$

$\boxed{c)}$
$$\begin{aligned} ax &- by &= 1\\ bx &+ ay &= 2 \end{aligned}$$

$1\cdot a-(-b)\cdot 2$

$x^* = \frac{\left|\begin{pmatrix}1 & -b\\ 2 & a\end{pmatrix}\right|}{a^2+b^2} = \frac{a+2b}{a^2+b^2}$

$y^* = \frac{\begin{vmatrix}a & 1\\ b & 2\end{vmatrix}}{a^2+b^2} = \frac{2a-b}{a^2+b^2}$

Regel von Cramer (für 2x2 Systeme)

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$. Falls $|A| \neq 0$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung x_1^*, x_2^*

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Aufgabe 13.2.1

Verwende die Regel von Sarrus, um die Determinanten der folgenden Matrizen zu berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$|A| = 1 \cdot 3 \cdot 0 + \overbrace{(-1) \cdot 2 \cdot 1}^{\neq 0} + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$= -2$$

Aufgabe 13.6.3

a) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 3 + 3\cdot 5 \\ -3\cdot 3 + 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12+15 \\ -9+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

A^{-1}

Löse folgende Gleichungssysteme, indem Du die Koeffizientenmatrix invertierst.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

a)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 3x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

falls $|A| \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2\cdot(-4) - (-3)\cdot 3 = -8 + 9 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 8 + 3\cdot 11 \\ -3\cdot 8 + 2\cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 + 33 \\ -24 + 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14 HT 2024

Falls c) wahr $\Rightarrow$ a) falsch
Falls c) wahr $\Rightarrow$ c) falsch

Es sei die Matrix $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ gegeben.

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) Die Matrix P ist positiv definit.

b) Die Matrix P hat eine Inverse.

c) Die Determinante der Matrix P ist gleich null. $|P| = 7 \neq 0$

d) Die beiden Spaltenvektoren $\binom{2}{3}$ und $\binom{3}{8}$ sind linear unabhängig. nicht im WS 24/25.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

P ist positiv definit, falls

$$\underbrace{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}_{|P|} > 0 \quad , \quad p_{11} > 0$$

$$(\Rightarrow \quad p_{22} > 0)$$

falls $p_{12} = p_{21}$

$$|P| = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 16 - 9 = 7 > 0$$

$p_{11} = 2 > 0$ $\qquad$ P ist positiv definit.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|P| = 7$$

Inverse von P:

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{pmatrix} \text{, falls } |P| \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14 NT 2024

Lsg-Variante α
setze x aus Antworten ein
und berechne $|A|$

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2-x \\ x-2 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $x \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$|A| = 8 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2$
$= -16 + 4 = -12 \neq 0$

Für welche Werte von x ist die Determinante von A gleich null?

a) $|A| = 0$ für $x = 4$
b) $|A| = 0$ für $x = -4$ und $x = 4$
c) $|A| = 0$ für $x = -2$ und $x = 6$ ✓
d) $|A| = 0$ für $x = -2$ und $x = 2$

Lsg Variante β Berechne $|A|$ mit x

$|A| = 8 \cdot (-2) - (2-x)(x-2) = -16 + (x-2)\cdot(x-2)$

$= ((x-2)-4)((x-2)+4) = (x-6)(x+2) = 0$

$\iff x = 6 \lor x = -2$

Zusatzaufgabe

Zeige, dass die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

keine Inverse hat.

$|P| = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$

also existiert keine Inverse.

angenommen es gibt eine Inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$4 \cdot a + 2 \cdot b \overset{!}{=} 1$ $\qquad$ $2 \cdot a + b \overset{!}{=} 0$

$b = -2a$

$4 \cdot a + 2 \cdot (-2a) = 4a - 4a = 0 \neq 1$