Übung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

12.4 Vektoralgebra

Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

12.5 Matrizenmultiplikation

Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Aufgabe 12.6.6 von Seite 548

Klausuraufgaben

Aufgabe 10 HT 2022
Aufgabe 10 NT 2022
Aufgabe 13 HT 2024
Aufgabe 13 NT 2024

Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

Schreibe den Vektor $(4, -11)$ als Linearkombination von $(2, -1)$ und $(1, 4)$.

suche t & s sodass

$$t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ -1 \cdot t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot s \\ 4 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcrcr} 2 \cdot t & + & s & = & 4 \\ -t & + & 4 \cdot s & = & -11 \end{array}}$$

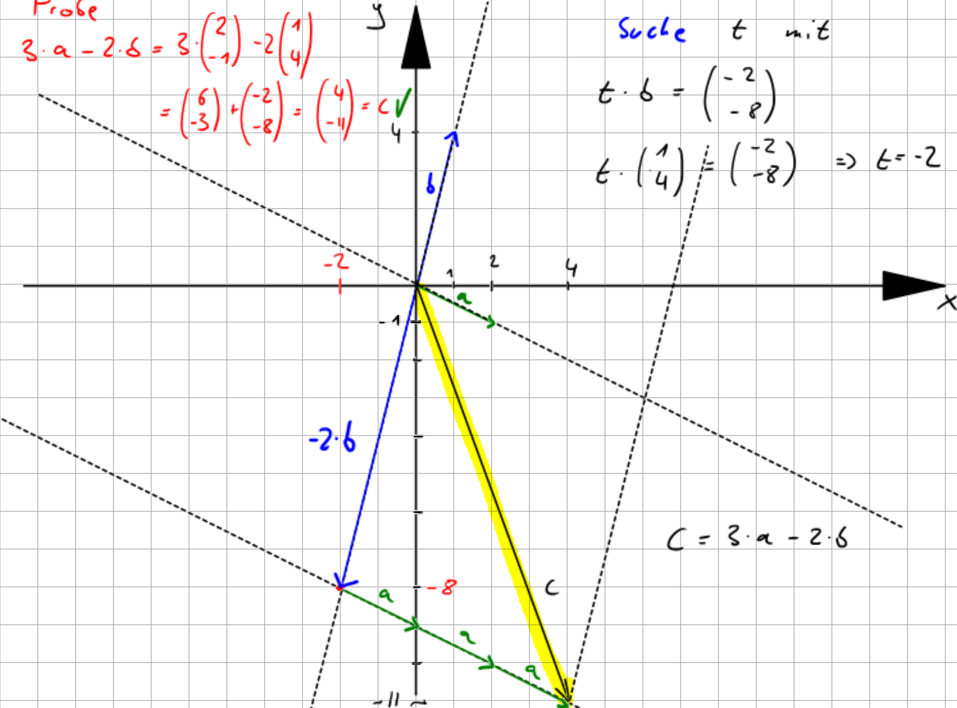
Probe

$$3\cdot a - 2\cdot b = 3\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix} = c \checkmark$$

Suche t mit

$$t\cdot b = \begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$$

$$t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix} \Rightarrow t = -2$$



$$c = 3\cdot a - 2\cdot b$$

Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

Bestimme alle Matrizen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot c & 1 \cdot b + 2d \\ 2 \cdot a + 3 \cdot c & 2 \cdot b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b & 2a + 3b \\ c + 2d & 2c + 3d \end{pmatrix}$$

$$a + 2c = a + 2b$$
$$\Leftrightarrow \boxed{c = b}$$

$$1b + 2d = 2a + 3b$$
$$\Leftrightarrow 2d = 2a + 2b$$
$$\Leftrightarrow \boxed{d = a + b}$$

$$2a + 3c = c + 2d$$
$$2a + 2c = 2d$$
$$\boxed{a + c = d}$$

$$2b + 3d = 2c + 3d$$
$$\Leftrightarrow \boxed{b = c}$$

Aufgabe 12.6.6 von Seite 548

Eine quadratische Matrix A heißt **idempotent**, falls $AA = A$ gilt.

a) Zeige, dass die folgende Matrix idempotent ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Zeige: Wenn $AB = A$ und $BA = B$, dann sind A und B beide idempotent.

c) Zeige: Wenn A idempotent ist, dann gilt $A^n = A$ für alle natürlichen Zahlen n.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} 2\cdot 2 + (-2)(-1) + (-4)1 & 2(-2) + (-2)\cdot 3 + (-4)(-2) & 2(-4) + (-2)4 + (-4)(-3) \\ -1\cdot 2 + 3(-1) + 4\cdot 1 & -1(-2) + 3\cdot 3 + 4\cdot(-2) & -1(-4) + 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) \\ 1\cdot 2 - 2(-1) - 3\cdot 1 & 1\cdot(-2) + (-2)3 - 3\cdot(-2) & 1\cdot(-4) - 2\cdot 4 - 3\cdot(-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll|rrr} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 & 2 & -2 & -4 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 & -1 & 3 & 4 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 & 1 & -2 & -3 \end{array}$$

2. Teil: ab 15 Uhr

b)

$$BA \overset{(*)}{=} B \qquad AB \overset{(**)}{=} A$$

$$\underbrace{AB}_{\substack{A \\ (**)}} A = \underbrace{AB}_{\substack{A \\ (**)}} \qquad \underbrace{BA}_{\substack{B \\ (*)}} B = \underbrace{BA}_{\substack{B \\ (*)}}$$

$$A \cdot A = A \qquad B B = B$$

---

c) • $A \cdot A = A$ ✓

Falls $A^n = A \Rightarrow A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A$ ✓

Aufgabe 10 HT 2022

$A \cdot B = C$
$3\times 2 \quad 2\times 3 \quad 3\times 3$

Es seien die zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 4 & 16 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$
3×2

beliebige Zeile von A

$(4, \ 16)$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
2×3

beliebige Spalte von B

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

gegeben.

beliebiges Element von C

$(4, \ 16) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 16 \cdot 3 = 4 + 48 = \underline{52}$

Berechnen Sie das Produkt $C = A \cdot B$!

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) Der Eintrag der 2. Zeile und 2. Spalte von C lautet 52. ✓
b) Der Eintrag der 2. Zeile und 1. Spalte von C lautet 39.
c) Der Eintrag der 2. Zeile und 1. Spalte von C lautet 48.
d) Der Eintrag der 2. Zeile und 2. Spalte von C lautet 0.

$D \cdot E = F$

$2 \times 3 \quad 3 \times 2 \quad\quad 2 \times 2$

Aufgabe 10 NT 2022

orthogonal = senkrecht
"$\perp$"

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) Keine zwei der drei Vektoren $(-21, 3, 7)$, $(6, 42, 0)$ und $(-2, 7)$ sind orthogonal.

b) Die Vektoren $(-21, 3, 7)$ und $(-2, 7)$ sind orthogonal.

c) Die Vektoren $(6, 41, 0)$ und $(-2, 7)$ sind orthogonal.

d) Die Vektoren $(-21, 3, 7)$ und $(6, 42, 0)$ sind orthogonal. ✓

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist nur definiert, falls sie gleich viele Komponenten haben.

c) $(6, 41, 0) \cdot (-2, 7)$ ist nicht möglich

b) $(-21, 3, 7) \cdot (-2, 7)$ ist nicht möglich

d) $(-21, 3, 7) \cdot (6, 42, 0) = -21 \cdot 6 + 3 \cdot \overbrace{42}^{2 \cdot 21} + 7 \cdot 0$

$= 21(-6 + 3 \cdot 2) = 0$

Aufgabe 13 HT 2024

Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Wie lautet das Produkt $A \cdot B$?

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ✓

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13 NT 2024

$a \cdot (-1) + 0 \cdot 2 - (1 \cdot b + 0 \cdot x) \overset{!}{=} 0$

$-a \quad -b = 0 \iff \boxed{-a = b}$

$-x(-1) + (-1)\cdot 2 - (-2 \cdot b + (-1)x) = 0$

$x - 2 + 2b + x = 0$

$2x - 2 + 2b = 0$

$x - 1 + b = 0 \iff \boxed{b = 1 - x}$

Wie lauten die Zahlen a, b und x, sodass die folgende Gleichung gültig ist? $-x \cdot 0$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ x & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $a = 2,\ b = 1,\ x = -1$

b) $a = -1,\ b = -1,\ x = -2$

c) $a = 2,\ b = -1,\ x = 1$

d) $\boxed{a = 1,\ b = -1,}\ x = 2$

nur hier ist $a = -b$ erfüllt.