Übung 7 zu Kapitel 10:[1]

Integration

Moodle

Lehrbuch

[1]Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das üben wir in diesem Kapitel:

10.1 Unbestimmte Integrale

Beispiel 10.1.3 von Seite 427
Aufgabe 10.1.3 von Seite 429

10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Beispiel 10.2.2 von Seite 434

10.5 Partielle Integration

Beispiel 10.5.2 von Seite 453

Rechenregel Nr. 1

$$\int x^r \, dx = \frac{1}{1+r} \cdot x^{1+r} + C \quad \text{für } r \neq -1$$

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln(x) + C$$

Beispiel 10.1.3 von Seite 427

a) Wie lautet die Ableitung von $F(x) = x(\ln(x) - 1)$?

b) Wie lautet das unbestimmte Integral $\int \ln(x) dx$?

a) $\left(\underbrace{x}\underbrace{(\ln(x) - 1)}\right)' = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x)$

b) $\int \ln(x)\, dx = x(\ln(x) - 1) + C$

Aufgabe 10.1.3 von Seite 429

Bestimme folgende Integrale:

a) $\int (x^3 + 2x - 3) dx$
b) $\int (x-1)^2 dx$
c) $\int (x-1)(x+2) dx$

Probe

$\left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 3x + C\right)'$

$= x^3 + 2x - 3$

a) $\int (x^3 + 2x - 3) dx$

$= \int x^3 dx + \int 2x\, dx + \int (-3) dx$

$r=3 \quad r=1 \quad r=0 \quad x^0$

$= \int x^3 dx + 2\int x^1 dx - 3\int 1\, dx$

$= \frac{1}{1+3}x^{1+3} + 2\frac{1}{1+1}x^{1+1} - 3\frac{1}{1+0}x^{1+0} + C$

$= \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 3x + C$

b)

$$\int (x-1)^2 \, dx =$$

$$\int (x^2 - 2x + 1) \, dx$$

$$= \int x^2 \, dx + \int -2x \, dx + \int 1 \, dx$$

$$= \int x^2 \, dx - 2\int x \, dx + \int 1 \, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x + C'$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$$

Probe

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C\right)' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\int (x-1)(x+2)\,dx$$

$$= \int x^2 + 2x - x - 2\,dx$$

$$= \int \underline{x^2 + x - 2}\,dx$$

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$

Probe

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c\right)' = \underline{x^2 + x - 2}$$

$$x^2 + x - 2 : x - 1 = x + 2$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 & + x & -2 \\
\ominus & x^2 & - x & \downarrow \\
\hline
 & 0 & + 2x & -2 \\
 & \ominus & 2x & -2 \\
\hline
 & & 0 & 0
\end{array}$$

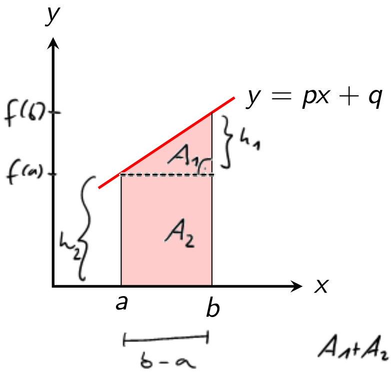
$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

Beispiel 10.2.2 von Seite 434

Bestimme die Fläche unterhalb der Geraden $f(x) = px + q$ über dem Intervall $[a, b]$, wobei a, b, p und q alle positiv sind mit $b > a$.

$$h_1 + h_2 = f(b)$$

$$h_1 = f(b) - f(a) = p \cdot b + q - p \cdot a - q = p \cdot (b-a)$$

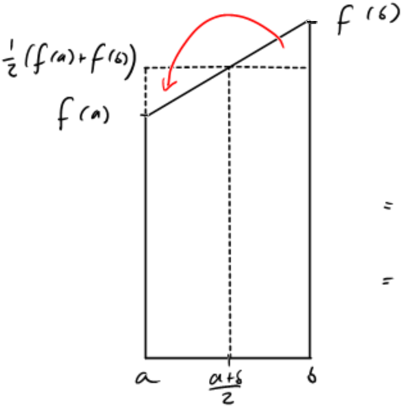


$$A_2 = h_2 \cdot (b-a) = f(a) \cdot (b-a) = (p \cdot a + q)(b-a)$$

$$A_1 = h_1 \cdot (b-a)\frac{1}{2} = p(b-a)(b-a)\frac{1}{2}$$

$$A_1 + A_2 = (pa+q)(b-a) + \frac{1}{2}p(b-a)^2 = (b-a)\left[pa + q + p(b-a)\frac{1}{2}\right]$$

$$= (b-a)\left(\frac{1}{2}pa + \frac{1}{2}pb + q\right) = (b-a)\left(\frac{1}{2}p(a+b) + q\right)$$



$$(b-a)\,\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$= (b-a)\,\frac{1}{2}\left(ap+q+bp+q\right)$$

$$= (b-a)\left(p\,\frac{1}{2}(a+b)+q\right)$$

$$\int_a^b px + q \, dx$$

1. Berechne $\int px^1 + qx^0 \, dx = \underbrace{p \frac{1}{2} x^2 + qx}_{F(x)} + C$

2. Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b px + q \, dx = F(b) - F(a) = \overbrace{p \frac{1}{2} b^2 + qb}^{F(b)} - \overbrace{\left(p \frac{1}{2} a^2 + qa\right)}^{F(a)}$$

$$= p \cdot \frac{1}{2} \underbrace{(b^2 - a^2)}_{(b-a)(b+a)} + q(b-a) = \frac{1}{2} \cdot p (b-a)(b+a) + q(b-a)$$

$$= (b-a)\left[\frac{1}{2} p (b+a) + q\right]$$

Beispiel 10.5.2 von Seite 453

Berechne das Integral

$$\int \underbrace{\frac{1}{x}}\underbrace{\ln(x)}dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2$$

Lösungsweg über partielle Integration

Probe $\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2\right]' = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \underline{\ln(x) \cdot \frac{1}{x}}$

$$\int \frac{1}{x}\ln(x)\,dx + \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\ln(x) + \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\int \frac{1}{x}\ln(x)\,dx \qquad = \int \left(\ln(x) \cdot \ln(x)\right)'\,dx$$

$$= \ln(x) \cdot \ln(x)$$