Übung 6 zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Moodle

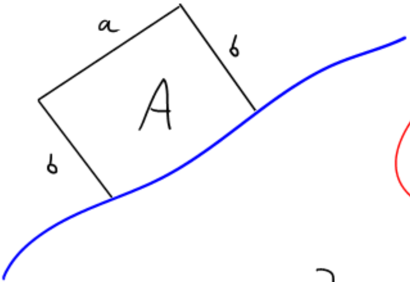
Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Aufgabe 9.3 von Seite 421:

Ein Bauer hat 1000 Meter Zaun zur Verfügung um eine rechteckige Einzäunung vorzunehmen. Eine der Seiten ist ein gerades Flussufer, so dass an dieser Seite kein Zaun benötigt wird.

Wie lang sollten die Seiten gewählt werden, um die Fläche zu maximieren?



$$A = a \cdot b$$

Nebenbedingung

$$a + b + b = 1000$$

$$a = 1000 - 2b$$

$$\left[\begin{array}{l} \max\limits_{a,b \geq 0} \quad a \cdot b \quad \text{u.d.B.} \quad a + 2b = 1000 \end{array}\right] \iff \begin{array}{l} \max \quad (1000 - 2b) \cdot b \\ b \geq 0 \\ b \leq 500 \end{array}$$

$$\max_{0 \le b \le 500} \; (1000-2b)\cdot b$$

Falls $0 < b^* < 500$ Max-Stelle

Dann $\left((1000-2b^*)\cdot b^* \right)' = 0$

1. Ableitung

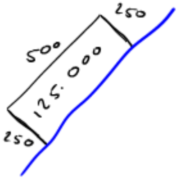
$$\left((1000-2b)\cdot b \right)' = -2\cdot b + (1000-2b)\cdot 1$$
$$= -2b + 1000 - 2b = \boxed{1000 - 4b} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 250$$

$$\Rightarrow \quad a = 1000 - 2\cdot 250 = 500$$

2. Ableitung: $-4 < 0$

$\Rightarrow (a^* = 500,\ b^* = 250)$ Max-Stelle.



Aufgabe 9.4 von Seite 421:

Durch die Produktion und den Verkauf von Q Einheiten eines Gutes erzielt ein Unternehmen den Gesamterlös $R(Q) = -0.0016Q^2 + 44Q$ und hat dabei die Kosten $C(Q) = 0.0004Q^2 + 8Q + \underbrace{64000}_{\text{Fixkosten}}$.

a) Welches Produktionsniveau maximiert den Gewinn?

$$\pi(Q) = \underbrace{R(Q)}_{\text{Erlös}} - \underbrace{C(Q)}_{\text{Kosten}}$$

$$= \overbrace{-0.0016Q^2 + 44Q}^{R(Q)} - \overbrace{(0.0004Q^2 + 8Q + 64000)}^{C(Q)}$$

$$= -0.0016Q^2 + 44Q - 0.0004Q^2 - 8Q - 64000$$

$$= -0.002Q^2 + 36Q - 64000$$

$$\pi'(Q) = 2\cdot(-0.002Q) + 36 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -0.004Q + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 36 = 0.004\,Q = \frac{4}{1000} \cdot Q$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{36\,000}{4} = Q$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q^{*} = 9\,000}$$

$$\pi''(Q) = -0.004 < 0$$

$\Rightarrow$ π ist streng konkav $\Rightarrow$ $Q^{*} = 9000$ Max-Stelle.

Aufgabe 9.5 von Seite 421:

Der Preis P, der pro Einheit aus der Produktion und dem Verkauf von $Q \geq 0$ Einheiten erzielt wird, ist $P = a - bQ^2$. Die Kosten für die Produktion und den Verkauf von Q Einheiten sind $C = \alpha + \beta Q$. Alle Konstanten sind positiv mit $a > \beta$.

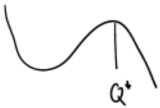
Bestimme den Wert von Q, der den Gewinn maximiert.

Erlös $\quad P \cdot Q = (a - bQ^2) \cdot Q$

Gewinn $\quad \pi(Q) = (a - bQ^2) \cdot Q - \alpha - \beta \cdot Q$

$$= a \cdot Q - bQ^3 - \alpha - \beta Q$$

$$= -bQ^3 + \underbrace{(a - \beta)}_{>0} Q - \alpha$$



$$\pi'(Q) = -3bQ^2 + a - \beta \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a - \beta = 3bQ^2 \quad \Leftrightarrow \quad Q^2 = \frac{a - \beta}{3b} > 0$$

$$Q \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{a-\beta}{3b}}$$

$$\pi''(Q) = -6bQ < 0$$

$$\Rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{a-\beta}{3b}} \quad \text{Max-Stelle.}$$

Preis positiv

$$P = a - b \cdot Q^2$$

$$= a - \cancel{b} \cdot \frac{a-\beta}{3\cancel{b}}$$

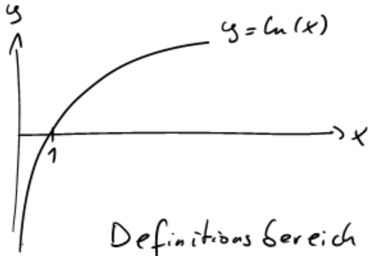
$$= a - \frac{a}{3} + \frac{\beta}{3} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}\beta > 0 \quad ✓$$

Aufgabe 9.7 von Seite 421: (optional)

Sei $g(x) = x - 2\ln(x+1)$:

a) Wo ist g definiert?
b) Bestimme $g'(x)$ und $g''(x)$.
c) Bestimme alle Extremstellen und Wendestellen.
d) Skizziere den Graphen.

a) ln ist nur für positive Zahlen definiert



$\Rightarrow$ für $\ln(x+1)$ muss gelten $x+1 > 0$

$\Leftrightarrow$ $x > -1$

Definitionsbereich von g: $D = (-1, \infty)$

b) $g'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x+1} = 1 - 2 \cdot (x+1)^{-1}$

$g''(x) = -2 \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

c) $g'(x) \overset{!}{=} 0$

$1 - 2\frac{1}{x+1} \overset{!}{=} 0 \iff 1 = \frac{2}{x+1}$

$\iff x+1 = 2 \iff \boxed{x=1}$

$g''(x) > 0$ für alle x

$\Rightarrow$ g streng konvex

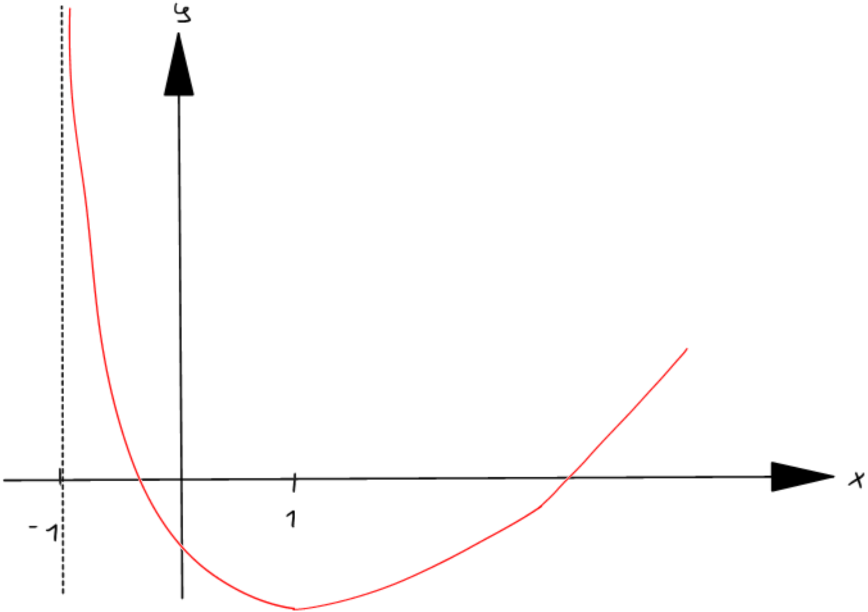
$\Rightarrow$ $x=1$ Min-Stelle

Wendestelle(n) ?

$g''(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad | \cdot (x+1)^2$

$\iff 2 = 0$ Widerspruch.

Es gibt keine Wendestelle.



y
x
-1
1