Übung zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Teil 2

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben besprechen wir heute:

9.4 Extremwertsatz

Aufgabe 9.4.1 von Seite 406

9.6 Lokale Extremstellen

Aufgabe 9.6.5 von Seite 420
Aufgabe 9.6.6 von Seite 420

Klausuraufgaben

Aufgabe 6 NT 2023
Aufgabe 4 NT 2024
Aufgabe 5 NT 2024

Aufgabe 9.4.1 von Seite 406

Bestimme das Maximum und das Minimum und zeichne den Graphen von

$$f(x) = 4x^2 - 40x + 80, \text{ für } x \in [0, 8].$$

Def- Bereich $[0, 8]$ abgeschlossen beschränkt

f stetig

$\Rightarrow f''(x) = 8 > 0$
f konvex

Extremwertsatz
$\Longrightarrow$ Es gibt (mindestens) ein Max & Min.

Schritt 1: $f'(x) = 4 \cdot 2x - 40 \overset{!}{=} 0 \quad | : 8$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \in (0, 8)$

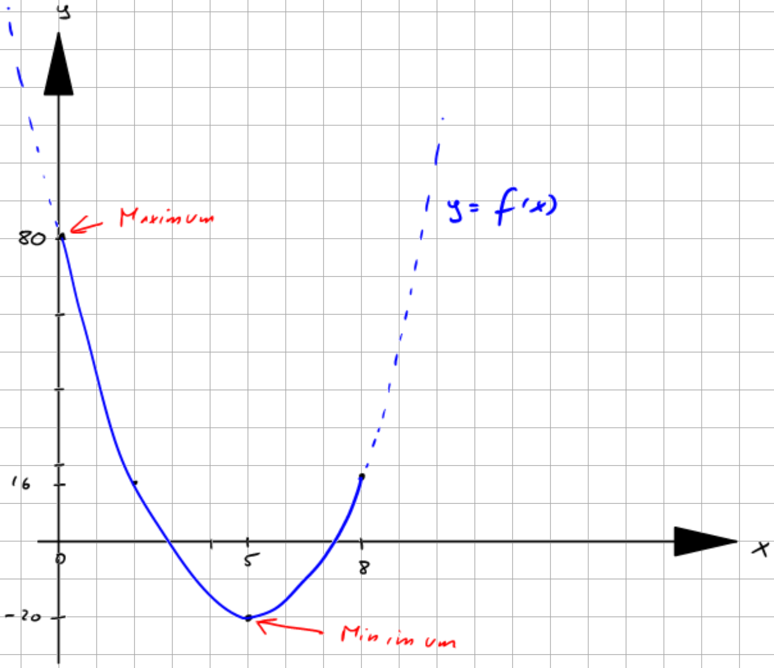
$x = 5$ ist ein innerer stationärer Punkt.

Schritt 2: $f(0) = 4 \cdot 0^2 - 40 \cdot 0 + 80 = 80$; $f(5) = 4 \cdot 5^2 - 40 \cdot 5 + 80$

$= 100 - 200 + 80$

$f(8) = 4 \cdot 8^2 - 40 \cdot 8 + 80 = \dots = 16$

$= -20$


y
Maximum
80
y = f'(x)
16
x
0
5
8
-20
Minimum

alternativ ohne Ableiten:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x^2 - 40x + 80 \\
&= 4(\overset{a^2}{x^2} - \overset{2\cdot 5\cdot a}{10x} + 20) \\
&= 4(x^2 - 2\cdot x\cdot 5 + 25 - 5) \\
&= 4(\underbrace{(x-5)^2}_{\geq 0} - 5) \geq 4\cdot(-5) = -20
\end{aligned}
$$

$$f(x) = -20 \iff x = 5$$

Aufgabe 9.6.5 von Seite 420

Sei

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Welche Forderungen müssen an die Konstanten a, b und c gestellt werden, damit die Funktion

a) ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$ hat?

b) stationäre Stellen in $x = 1$ und $x = 3$ hat?

a) falls lok. Minimum x_0 innere Stelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

falls x_0 stationär & $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ lok. Minimum.

$$f'(x) = 3x^2 + a \cdot 2x + b$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + a \cdot 2 \cdot 0 + b \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x + a \cdot 2 = 6 \cdot x + 2 \cdot a$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 2 \cdot a = 2a > 0 \Leftrightarrow \boxed{a > 0}$$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9x + c$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 3 + 2a + b = 0 \quad | -3 - 2a$

$\Leftrightarrow b = -3 - 2a$

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 27 + 6a + b = 0$

$\Rightarrow 27 + 6a + (-3 - 2a) = 0$

$\Leftrightarrow 24 + 4a = 0 \quad | :4$

$\Leftrightarrow 6 + a = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a = -6}$

$b = -3 - 2(-6) = -3 + 12 = 9 \qquad \boxed{b = 9}$

Aufgabe 9.6.6 von Seite 420

Bestimme die lokalen Extremstellen für

a) $f(x) = x^3 e^x$

b) $g(x) = x^2 2^x$

a) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + \overset{x^2 \cdot x}{x^3} \cdot e^x = x^2 \underbrace{e^x}_{>0} (3 + x) \overset{?}{=} 0 \quad |:e^x$

$\iff x^2 (3 + x) = 0 \iff x = 0$ oder $x = -3$

$f''(x) = 6x\, e^x + \overset{x \cdot x}{3x^2} e^x + \overset{x \cdot x}{3x^2} e^x + \overset{x \cdot x^2}{x^3} \cdot e^x$

$= x \cdot e^x (6 + 3x + 3x + x^2)$

$= x \cdot e^x (6 + 6x + x^2)$

$f''(0) = 0 \cdot e^0 (6 + 6 \cdot 0 + 0^2) = 0$

$f''(-3) = -3 \cdot e^{-3} (6 + 6(-3) + (-3)^2)$

$= -3 e^{-3} (6 - 18 + 9)$

$\to -3 \cdot e^{-3} (-3)$

$= 9 \cdot e^{-3} > 0$

zwei stationäre Stellen

$x = 0$ | $x = -3$

$f''(0) = 0 \rightsquigarrow$ unbestimmt | $f''(-3) > 0 \rightsquigarrow$ striktes lokales Minimum

Gibt es einen Vorzeichenwechsel von f' um $x = 0$?

$$f'(x) = x^2 \cdot e^x (3 + x)$$

für $x = -\varepsilon$ (ε ist eine kleine positive Zahl)

$$f'(-\varepsilon) = \underbrace{(-\varepsilon)^2}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-\varepsilon}}_{>0} \underbrace{(3 - \varepsilon)}_{>0} > 0$$

$$f'(\varepsilon) = \underbrace{\varepsilon^2}_{>0} \cdot \underbrace{e^{\varepsilon}}_{>0} \underbrace{(3 + \varepsilon)}_{>0} > 0$$

b) $g(x) = x^2 \cdot 2^x$ $\qquad (a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

$$g'(x) = 2x \cdot 2^x + \overset{x \cdot x}{x^2} \cdot \ln(2) \cdot 2^x$$

$$= x \cdot \underbrace{2^x}_{>0} (2 + x \cdot \ln(2)) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } 2 + x \cdot \ln(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln(2) = -2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{\ln(2)}$$

zwei stationäre Stellen $x = 0$, $x = -\frac{2}{\ln(2)}$

$$g''(x) = 2 \cdot 2^x + 2x \cdot \ln(2) \cdot 2^x + 2x \cdot \ln(2) \cdot 2^x + x^2 \ln(2) \cdot \ln(2) \cdot 2^x$$

$$= 2^x (2 + 2x \cdot \ln(2) + 2x \cdot \ln(2) + x^2 \cdot (\ln(2))^2)$$

$$= 2^x (2 + 4 \cdot x \ln(2) + x^2 (\ln(2))^2)$$

$$g''(0) = 2^0 (2 + 4 \cdot 0 \cdot \ln(2) + 0^2 \cdot (\ln(2))^2) = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ lok. Minimum

$$g''\left(-\frac{2}{\ln(2)}\right) = \underbrace{2^{\left(-\frac{2}{\ln(2)}\right)}}_{>0}\left(2 + 4\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{\ln(2)}}\right)\cdot \cancel{\ln(2)} + \left(-\frac{2}{\cancel{\ln(2)}}\right)^2 \cdot \cancel{(\ln(2))^2}\right)$$

$$= 2^{\left(-\frac{2}{\ln(2)}\right)}\left(2 - 8 + 4\right) = 2^{\left(-\frac{2}{\ln(2)}\right)} \cdot (-2) = \underbrace{-2 \cdot 2^{\left(-\frac{2}{\ln 2}\right)}}_{<0}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{2}{\ln(2)} \quad \text{lok. Max.}$$

Aufgabe 6 NT 2023

Wendestelle x_0 : an x_0 wechselt f'' das Vorzeichen

$\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Gegeben sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 3x - 3\ln(x+1), \; x > -1$$

Wie lautet die Wendestelle von f?

a) Die Funktion f hat keine Wendestelle. ✓ (da $f'' > 0$ für alle x)

b) $x = 0$ ← stationär $f'(0) = 0$

c) $f'(x) = 3 - \frac{3}{x+1}$

d) $f''(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 3 - 3 \cdot \frac{1}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1} = 3 - 3(x+1)^{-1}$$

$$f''(x) = -3 \cdot (-1)(x+1)^{-2} = 3 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

Aufgabe 4 NT 2024

x_0 ist stationär, falls $f'(x_0) = 0$

x_0 ist ein Sattelpunkt, falls 1. x_0 stationär, 2. falls es keinen Vorzeichenwechsel von f' um x_0 gibt.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche wie folgt definiert sei:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & \text{falls } x \leq 1 \\ \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

a) An der Stelle $x_0 = 0$ ist ein Sattelpunkt von f.

b) An der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ ist ein Sattelpunkt von f.

c) An der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ ist f stationär.

d) An der Stelle $x_0 = 0$ ist f stationär.

falls $x \leq 1$: $f(x) = \frac{1}{3} x^3$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x_0 = 0$ ist stationär ✓

$f'(-\varepsilon) = (-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2 > 0$ $f'(\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0$ kein VZ-Wechsel $\Rightarrow x_0$ ist Sattelpunkt.

falls $x > 1$: $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \left(x - \frac{5}{3}\right)^2$

$f'(x) = -\frac{3}{4} \cdot 2 \left(x - \frac{5}{3}\right) \cdot 1 = -\frac{3}{2} \left(x - \frac{5}{3}\right) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

$x_1 = \frac{5}{3}$ ist stationär ✓

$f'\left(\frac{5}{3} - \varepsilon\right) = -\frac{3}{2} \left(\frac{5}{3} - \varepsilon - \frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \varepsilon > 0$ (für $\varepsilon > 0$)

$f'\left(\frac{5}{3} + \varepsilon\right) = -\frac{3}{2} \left(\frac{5}{3} + \varepsilon - \frac{5}{3}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \varepsilon < 0$ VZ-Wechsel $\rightarrow x_1$ kein Sattelpunkt.

alt. $f''(x) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}$ lokales Maximum.

Aufgabe 5 NT 2024

$\pi'(x) = 16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 = \frac{8}{\sqrt{x}} - 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}} = 1$

$\Leftrightarrow 4 = \sqrt{x} \Leftarrow 16 = x$

Es sei folgendes Maximierungsproblem für $x \geq 0$ gegeben:

$$\max_x 16 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot x$$

Wie lautet der Wert der Maximumstelle x^*?

a) $16 \cdot \sqrt{x^*} - 2 \cdot x^* = 2$
b) $16 \cdot \sqrt{x^*} - 2 \cdot x^* = 16$
c) $16 \cdot \sqrt{x^*} - 2 \cdot x^* = 16 \cdot \sqrt{2} - 4$
d) $16 \cdot \sqrt{x^*} - 2 \cdot x^* = 32$ ✓

$16 \cdot \sqrt{16} - 2 \cdot 16 = 16 \cdot 4 - 2 \cdot 16 = 2 \cdot 16 = 32$

Zur Schreibweise:

$$\max_{x} \; f(x) \qquad \text{unter der Bedingung} \; x \geq 0$$

u.d.B.

Maximierungsproblem: "maximiere $f(x)$ über x"