Übung zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Teil 1

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das üben wir in diesem Kapitel:

9.1 Extremstellen
Aufgabe 9.1.1 von Seite 389

9.2 Einfache Tests auf Extremstellen
Aufgabe 9.2.7 von Seite 393

9.3 Ökonomische Beispiele
Aufgabe 9.3.1 a) von Seite 399

Klausuraufgaben
Aufgabe 6 HT 2023
Aufgabe 4 HT 2024
Aufgabe 5 HT 2024

Aufgabe 9.1.1 von Seite 389

Finde die Extremstellen für die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{8}{3x^2+4}$

b) $g(x) = 5(x+2)^4 - 3$

f) $h(x) = 100 - e^{-x^2}$

Versuche diese Aufgabe ohne Ableitungen zu lösen.

a) $f(x) = \dfrac{8}{3x^2+4}$

Der Bruch wird groß, wenn der Nenner klein wird.

Der Nenner $3x^2+4$ wird klein, wenn x^2 klein wird.

x^2 ist minimal für $x=0$

Probe: $f(0) = \dfrac{8}{3\cdot 0^2+4} = \dfrac{8}{4} = 2$

Prüfe $f(x) = \dfrac{8}{3x^2+4} \leq 2 = f(0)$ für alle x

$$\overset{:2}{\Leftrightarrow} \quad \frac{4}{3x^2+4} \leq 1 \qquad \Big|\cdot \underbrace{(\underset{\geq 0}{3x^2}+4)}_{>0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{4} \leq 3x^2 + \cancel{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 3x^2 \qquad \Big| :3$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 \qquad \checkmark$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ ist Maximumstelle

$f(0) = 2$ ist Maximalwert

b) $g(x) = 5(x+2)^4 - 3 \geq -3$

Exponent ist grade $\Rightarrow$ $(x+2)^4 \geq 0$ für alle x

$(x+2)^4 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Damit gilt $g(x) = 5(x+2)^4 - 3 \geq -3 = g(-2)$
für alle x

Probe:

$$5(x+2)^4 - \cancel{3} \geq -\cancel{3}$$

$$\iff 5(x+2)^4 \geq 0 \qquad \mid :5$$

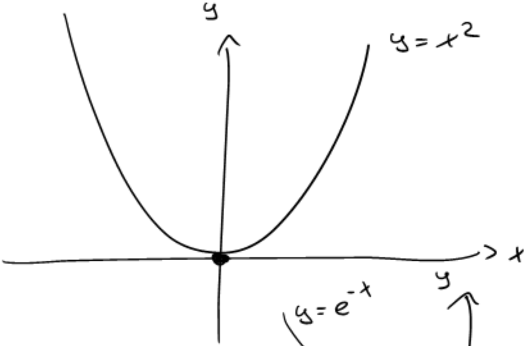
$$\iff (x+2)^4 \geq 0$$

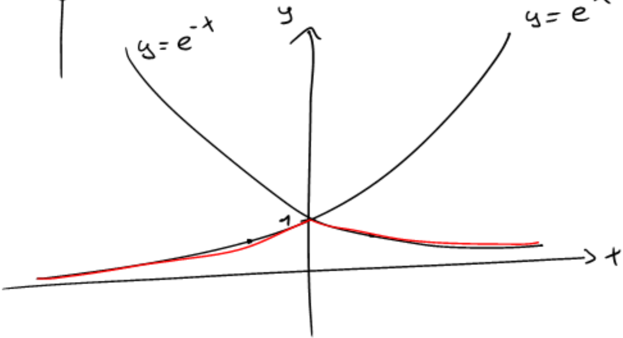
$$\iff |x+2| \geq 0 \qquad \checkmark$$

$x = -2$ ist die Minimimumstelle

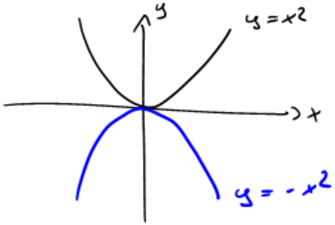
$g(-2) = -3$ ist der Minimalwert.

$h(x) = 100 - e^{-x^2}$ $\qquad$ $e^{-(1^2)} = e^{-1}$





$100 - e^{-x^2}$



x^2 ist minimal für $x=0$

$-x^2$ ist maximal für $x=0$

e^{-x^2} ist maximal, falls $-x^2$ maximal ist $\Leftrightarrow x=0$

$-e^{-x^2}$ ist minimal für $x=0$

$100 - e^{-x^2}$ ist minimal für $x=0$

$h(0) = 100 - e^{-0^2} = 100 - e^0 = 100 - 1 = 99$

Probe

$h(x) = 100 - e^{-x^2} \geq 99 = h(0)$

$$\overset{-gg}{\Leftrightarrow} \quad 1 - e^{-x^2} \geq 0 \qquad \mid + e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \geq e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \qquad \mid \cdot e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{x^2} \geq 1 \qquad \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{(x^2)}\right) = x^2 \geq \ln(1) = 0 \qquad \checkmark$$

$x=0$ Minimalstelle

$h(0) = gg$ Minimalwert

Aufgabe 9.2.7 von Seite 393

Bestimme die Extremstelle(n) von $f(x) = x^2 e^{-x}$ in $[0, 4]$.

$$\left.\begin{array}{ll} x^2 & \text{stetig} \\ e^{-x} & \text{stetig} \end{array}\right\} \; x^2 e^{-x} \;\text{ stetig}$$

$[0, 4]$ ist abgeschlossen

ist beschränkt

Extremwertsatz: es gibt mindestens ein Max und ein Min

Schritt 1: innere stationäre Stellen?

$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 e^{-x} \cdot (-1)$

$= x \cdot e^{-x} (2 - x) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad$ oder $\quad \underline{\underline{x = 0}}$

Randpunkt.

Schritt 2: Funktion auswerten

$f(0) = \underbrace{0^2}_{0} \cdot \underbrace{e^{-0}}_{1} = 0 \cdot 1 = 0$

$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = 4 \cdot \frac{1}{e^2} = \frac{4}{e^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^2$

$f(4) = 4^2 \cdot e^{-4} = 16 \cdot \frac{1}{e^4} = \frac{16}{e^4} = \left(\frac{2}{e}\right)^4$

Schritt 3 Vergleiche Funktionswerte

$f(2) = \left(\frac{2}{e}\right)^2 > 0 = f(0)$

$f(4) = \left(\frac{2}{e}\right)^4 > 0 = f(0)$

$x=0$ Min-Stelle , $f(0)=0$ Min-Wert.

$\left(\frac{2}{e}\right)^2 \qquad \left(\frac{2}{e}\right)^4 = \left(\left(\frac{2}{e}\right)^2\right)^2$

es gilt $e > 2 \Rightarrow \frac{2}{e} < 1$

$\left(\frac{2}{e}\right)^2 > \left(\left(\frac{2}{e}\right)^2\right)^2$

$\Rightarrow x=2$ ist Max-Stelle $\quad f(2) = \left(\frac{2}{e}\right)^2$ Max-Wert.

Alternativ: 2. Ableitung prüfen

$f'(x) = 2x\,e^{-x} - x^2 e^{-x}$

$f''(x) = 2\,e^{-x} + 2x \cdot e^{-x}(-1) - \left(2x\,e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1)\right)$

$= e^{-x}\left(2 - 2x - 2x + x^2\right)$

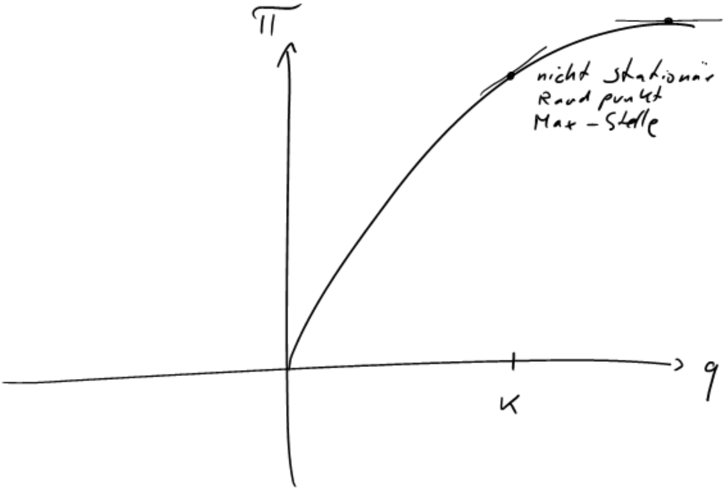
$= \underbrace{e^{-x}}_{>0}\left(2 - 4x + x^2\right) \quad | : e^{-x}$

$2 - 4x + x^2$

für $x = 2$: $2 - 4 \cdot 2 + 4 = -2 < 0$

für $x = 0$: $2 - 4 \cdot 0 + 0 = 2 > 0$

$f''(2) < 0$, $f''(0) > 0 \Rightarrow f$ weder konkav noch konvex



Π
nicht stationär
Randpunkt
Max - Stelle
K
q

Aufgabe 9.3.1 a) von Seite 399

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\pi(1) = 160 \cdot 2 - 40 = 320 - 40 = 280$$

Ein Unternehmen produziert $y = 2\sqrt{x}$ Einheiten eines Gutes, wenn $x \geq 0$ Stunden Arbeit verwendet werden. Welcher Wert von x maximiert den Gewinn $\pi(x)$, wenn der erzielte Preis pro Einheit $p = 160€$ und die Kosten pro Stunde Arbeit $w = 40€$ sind?

$$\pi(x) = \underbrace{160 \cdot 2\sqrt{x}}_{\text{Erlös}} - \underbrace{40x}_{\text{Kosten}}$$

$$\pi'(x) = 320 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 40 \overset{!}{=} 0 \iff 160 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 40 \quad | :40$$

$$\iff 4\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \quad | \cdot \sqrt{x} \iff 4 = \sqrt{x} \iff x^* = 16$$

$$\pi(x^*) = 160 \cdot 2 \cdot \sqrt{16} - 40 \cdot 16 = 320 \cdot 4 - 40 \cdot 4 \cdot 4$$

$$= 4(320 - 160) = 4 \cdot 160 = 640$$

Vergessen: ist π konkav? (Antwort: ja, $\pi'' < 0$)

$$\Pi'(x) = 160 \frac{1}{\sqrt{x}} - 40$$

$$= 160 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 40$$

$$\Pi''(x) = 160 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= -80 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \cdot x} = -\frac{80}{\sqrt{x} \cdot x} = -80 \cdot x^{-\frac{3}{2}} < 0$$

für alle $x > 0$

Aufgabe 6 HT 2023

Schritt 1:

$f'(x) = 3x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 1$

$= 3x^2 - 4x + 1 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow x^2 \underbrace{- \frac{4}{3}}_{p} x + \underbrace{\frac{1}{3}}_{q} = 0$

$x = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}}$

$= \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_3 = 1$

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \frac{4}{3}] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

Welcher der folgenden Werte für x ist **keine** Extremstelle dieser Funktion auf $[0, \frac{4}{3}]$?

a) $x_1 = \frac{1}{3}$

ankreuzen: b) $x_2 = \frac{2}{3}$

? c) $x_0 = 0$

d) $x_3 = 1$

$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 - 2(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{27} - \frac{6}{27} + \frac{9}{27} = \frac{4}{27}$

$\Rightarrow f'(x_2 = \frac{2}{3}) \neq 0$

$\Rightarrow$ x_2 keine Extremstelle, da x_2 innere Stelle ist

$f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8}{27} - \frac{24}{27} + \frac{18}{27} = \frac{2}{27}$

$f(0) = 0^3 - 2\cdot 0^2 + 0 = 0 \qquad f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 = 1-2+1 = 0$

Aufgabe 4 HT 2024

$f'(x) = 6 \cdot 2(3-x)(-1) = -12(3-x)$

$f''(x) = -12 \cdot (-1) = 12 > 0$

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = 6\underbrace{(3-x)^2}_{\substack{\geq 0 \\ =0,\text{ falls } x=3}} + 5 \geq 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

$= 5$, falls $x = 3$

definiert.

Min-Stelle: $x = 3$

Min-Wert: $f(3) = 5$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

✓ a) $f(x) \geq 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ — Es gilt: $f(x) \geq 5$ für alle $x \Rightarrow$ a)

✓ b) $x = 3$ ist die einzige Minimumstelle von f. • da $(3-x)^2 > 0$ für $x \neq 3$

✓ c) Der Minimalwert von f ist 5. • da $6(3-x)^2+5$ strikt konvex

✗ d) $x = 5$ ist eine Extremstelle von f.

$f(5) = 6(3-5)^2 + 5 = 6(-2)^2 + 5 = 6 \cdot 4 + 5$

$= 24 + 5 = 29 > 5 = f(3)$

Analog: $f(6) > f(5)$, $f(6) = 59$

$\Rightarrow x=5$ keine Max-Stelle.

$\Rightarrow x=5$ keine Min-Stelle

Aufgabe 5 HT 2024

Bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion
$f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -4x^2 + 12x - 20$$

X a) Die Minimumstelle lautet $x = 0$ und die Maximumstelle lautet $x = \frac{3}{2}$.

b) Die Minimumstelle lautet $x = 2$ und die Maximumstelle lautet $x = \frac{3}{2}$.

c) Die Minimumstelle lautet $x = 2$ und die Maximumstelle lautet $x = \frac{2}{3}$.

d) Die Minimumstelle lautet $x = \frac{3}{2}$ und die Maximumstelle lautet $x = 2$.

$f(x) = -4x^2 + 12x - 20$

Schritt 1: $f'(x) = -4 \cdot 2x + 12 = -8x + 12 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow 12 = 8x \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = x$

$0 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ ist innerer Stationäre Punkt

Schritt 2:

$f(0) = -4 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 20 = -20$

$f(\frac{3}{2}) = -4(\frac{3}{2})^2 + 12 \cdot \frac{3}{2} - 20$

$= -\cancel{4} \cdot \frac{9}{\cancel{4}} + 6 \cdot 3 - 20 = -9 + 18 - 20 = -11 > -20$

$f(2) = -4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 20 = -4 \cdot 4 + 24 - 20$

$= -16 + 4 = -12 < -11$

$x = \frac{3}{2}$ ist Max-Stelle, Max-Wert $f(\frac{3}{2}) = -11$

$x = 0$ ist Min-Stelle, Min-Wert $f(0) = -20$