Übungen 4 & 5 zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das üben wir in diesem Kapitel:

Aufgabe 9.1.1 von Seite 389

Finde die Extremstellen für die folgenden Funktionen:

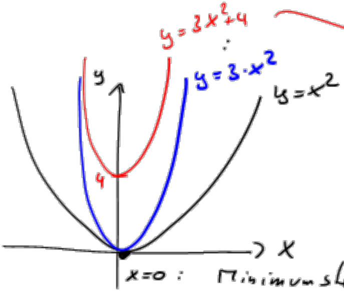
a) $f(x) = \frac{8}{3x^2+4}$

b) $g(x) = 5(x+2)^4 - 3$

f) $h(x) = 100 - e^{-x^2}$

Versuche diese Aufgabe ohne Ableitungen zu lösen.

a) $f(x) = \dfrac{8}{3x^2+4}$



Minimumstelle $x=0$
Minimalwert: $y = 4$

$x=0$: Minimumstelle
Minimalwert: $x^2 = 0^2 = 0$.

Ein Bruch wird größer, falls der Nenner kleiner wird.

$\Rightarrow$ $x=0$ ist Max-Stelle von $\dfrac{8}{3x^2+4}$

Maximalwert von $f(x)$ ist $\dfrac{8}{3\cdot 0^2+4} = \dfrac{8}{4} = 2$

Für eine Max-Stelle x_0 muss gelten:

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x.$$

Also für $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 2$:

$$2 \geq \frac{8}{3x^2+4} \quad \text{für alle } x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{4}{3x^2+4} \quad \Big| \cdot \underbrace{(3x^2+4)}_{\geq 4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2+4 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 \geq 0 \quad \checkmark$$

$f(x) = \dfrac{8}{3x^2+4}$ ist maximal an der Stelle $x=0$

und $f(x)$ hat keine Minimumstelle

Verifiziere Ergebnis durch Bed. 1. Ordnung:

$$f(x) = \frac{8}{3x^2+4} = 8(3x^2+4)^{-1}$$

$$f'(x) = -8(3x^2+4)^{-2} \cdot 6x = -\frac{48x}{(3x^2+4)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 48x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Berechne $\underbrace{f'(x) \cdot (x - \overset{\text{Kandidat}}{x_0})}$

falls $\leq 0 \Rightarrow$ Max Stelle

falls $\geq 0 \Rightarrow$ Min Stelle

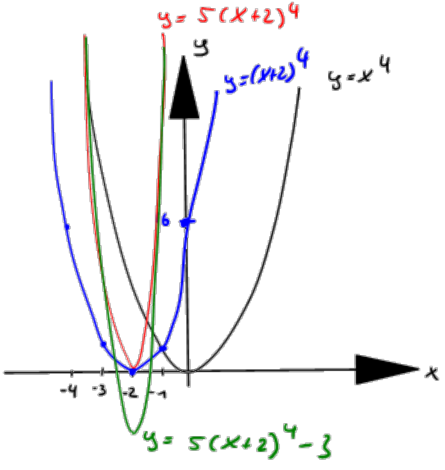
hier: $x_0 = 0$

$$f'(x) \cdot (x - 0) = -\frac{48x}{(3x^2+4)^2} \cdot x = -\frac{48x^2}{(3x^2+4)^2} \leq 0 \text{ für alle } x$$

$\Rightarrow x_0$ ist Max-Stelle.

b) $g(x) = 5(x+2)^4 - 3$

Starte mit $y = x^4$



Minstelle: $x = -2$

Min wert: $y = -3$

Hypothese

$f(-2) \leq f(x)$ für alle x

$-3 \leq 5(x+2)^4 - 3 \quad | +3$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 5(x+2)^4 \quad | :5$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq (x+2)^4$

$= \left((x+2)^2\right)^2 \quad \checkmark$

Verifiziere: $x=-2$ Min Stelle von $5(x+2)^4-3$

$$g'(x) = 20(x+2)^3 \overset{!}{=} 0 \iff (x+2)^3 = 0 \iff x+2 = 0$$

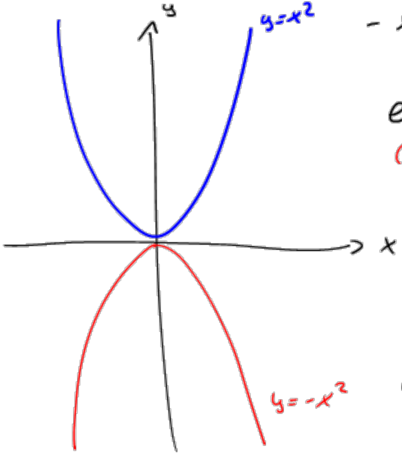
$$\iff x = -2$$

$$g''(x) = 60\underbrace{(x+2)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ g ist konvex $\Rightarrow$ $x=-2$ Min-Stelle.

f) $h(x) = 100 - e^{-x^2}$

Betrachte zunächst $x^2 \to$ Min-Stelle: $x=0$



$-x^2 \to$ Max-Stelle: $x=0$

$e^{-x^2} \to$ Max-Stelle: $x=0$

(eine Potenz mit positiver Basis steigt, falls der Exponent größer wird)

$-e^{-x^2} \to$ Min-Stelle $x=0$

$100-e^{-x^2} \to$ Min-Stelle $x=0$

$\to$ Min-Wert: $100 - e^{-0^2} = 100-1$
$= 99$

Prüfe $99 \leq 100 - e^{-x^2}$ für alle x

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x^2} \leq 1 \qquad \Big| \ \ln(\cdot)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{-x^2}\right) \leq \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 \leq 0 \qquad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \geq 0 \qquad \checkmark$$

$h(x) = 100 - e^{-x^2}$ hat eine Minimumstelle bei $x=0$

Test mit 1. Ableitung

BED

$$h'(x) = -\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\text{innere}} = 2x \underbrace{e^{-x^2}}_{>0} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x = 0$$

Ableitung

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x)(x - x_0) = 2x \cdot e^{-x^2}(x-0) = 2\underbrace{x^2}_{\geq 0}\underbrace{e^{-x^2}}_{>0} \geq 0$$

$\Rightarrow x=0$ ist Min-Stelle.

Aufgabe 9.2.7 von Seite 393

Def Bereich
enthält seinen Rand
BEO gilt nur für innere Punkte!

Bestimme die Extremstelle(n) von $f(x) = x^2 e^{-x}$ in $[0, 4]$.

1. Produktregel

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-x} + x^2 \left(e^{-x}\right)'$$

2. Kettenregel

$$= 2x \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{innere}}$$

Ableitung

$$= 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x}$$

$$= e^{-x} (2x - x^2)$$

$$= x \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} (2 - x) \overset{!}{=} 0 \iff x(2-x) = 0$$

$e \approx 2{,}718\ldots$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\text{Randpunkt}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{x=2}_{\text{innerer Punkt}}$$

Variante 1 — setze Kandidaten ein

$$x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0$$

$$x_1 = 2 \rightarrow f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = 2^2 \cdot \frac{1}{e^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^2 > 0$$

$$x_3 = 4 \rightarrow f(4) = 4^2 \cdot e^{-4} = 4^2 \cdot \frac{1}{e^4} = 2^4 \cdot \frac{1}{e^4} = \left(\frac{2}{e}\right)^4 > 0$$

$$4^2 = (2\cdot 2)^2 = 2^2 \cdot 2^2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4$$

$x_0 = 0$ ist eine Min-Stelle.

$$e > 2 \Rightarrow \frac{2}{e} < 1$$

$$\left(\frac{2}{e}\right)^4 = \left(\frac{2}{e}\right)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{e}\right)^2}_{<1} < \left(\frac{2}{e}\right)^2$$

$x_1 = 2$ ist eine Max-Stelle

Variante 2 Prüfe 2. Ableitung

$$f'(x) = \underbrace{x}_{} \cdot \underbrace{e^{-x}(2-x)}_{}$$

$$f''(x) = 1\cdot e^{-x}(2-x) + x\left(e^{-x}(2-x)\right)'$$

$$= e^{-x}(2-x) + x\left(-e^{-x}(2-x) + e^{-x}\cdot(-1)\right)$$

$$= e^{-x}\left[2-x-x-x\right] = \underbrace{e^{-x}}_{>0}\left[2-3x\right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} >0 & \text{falls } 2-3x>0 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3} \\ =0 & \text{falls } 2-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \\ <0 & \text{falls } 2-3x<0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vorzeichen von f'' unbestimmt

$\Rightarrow$ Variante ist nicht hilfreich

Variante 3

$$f'(x) = x\,e^{-x}(2-x)$$

$$f'(x)\cdot(x-x^*) \le 0 \text{ für alle } x\ ?$$

Für $x^* = 0$

$$x\cdot e^{-x}(2-x)(x-\overset{x^*}{0}) = \underbrace{x^2}_{\ge 0}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{>0}\underbrace{(2-x)}_{?} \lessgtr 0$$

$\Rightarrow$ keine Aussage möglich

$x^* = 2$

$$x\cdot e^{-x}(2-x)(x-\overset{x^*}{2}) = -\underbrace{x}_{\ge 0}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{>0}\underbrace{(2-x)^2}_{\ge 0} \le 0 \text{ für alle } x$$

$\Rightarrow x^* = 2$ ist Max-Stelle.

Aufgabe 9.3.1 a) von Seite 399

Ein Unternehmen produziert $y = 2\sqrt{x}$ Einheiten eines Gutes, wenn $x \geq 0$ Stunden Arbeit verwendet werden. Welcher Wert von x maximiert den Gewinn $\pi(x)$, wenn der erzielte Preis pro Einheit $p = 160$€ und die Kosten pro Stunde Arbeit $w = 40$€ sind?

$$\pi(x) = \overbrace{160 \cdot 2\sqrt{x}}^{\text{Erlös}} - \overbrace{40 \cdot x}^{\text{Kosten}} \quad , \quad x \geq 0$$

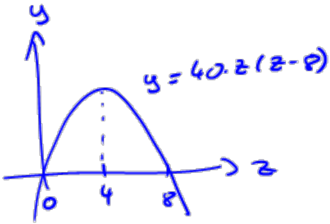
$$= \underbrace{320}_{40 \cdot 8}\sqrt{x} - 40\underbrace{x}_{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$$

$$= 40 \cdot \overset{z}{\sqrt{x}}\,(8 - \overset{z}{\sqrt{x}})$$

$$= 40 \cdot z\,(8 - z)$$

$\Rightarrow$ Max-Stelle: $z = 4$ bzw.

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$



Alternativ

$$\pi'(x) = 320 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 40 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{160}{\sqrt{x}} = 40 \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{x}}{40}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 16$$

$$\pi''(x) = \left(\frac{160}{\sqrt{x}} - 40\right)' = \left(160 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 40\right)'$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 160 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{80}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{80}{x \cdot \sqrt{x}} < 0$$

für alle $x > 0$

$\Rightarrow \pi$ ist streng konkav

$\Rightarrow$ stationäre Stellen sind Max-Stellen.

Alternative 2

$$\pi'(x)\cdot(x-\overset{x^*}{\overset{\downarrow}{16}}) = \left(\frac{160}{\sqrt{x}}-40\right)(x-\overset{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-4\cdot 4}{16})$$

$$= \left(\frac{160}{\sqrt{x}}-40\right)(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$$

$$= 40\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$$

$$= \frac{40}{\sqrt{x}}(4-\sqrt{x})(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)$$

$$= -\underbrace{\frac{40}{\sqrt{x}}}_{>0}\underbrace{(4-\sqrt{x})^2}_{\geq 0}\underbrace{(\sqrt{x}+4)}_{>0} \leq 0 \text{ für alle } x>0$$

$\Rightarrow x^* = 16$ ist Max-Stelle.

Ökonomische Bedingung für Optimum

$$\underbrace{\text{Wert des Grenzproduktes}} = \text{Grenzkosten}$$

$$p \cdot f'(x) = c'(x)$$

$$160 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{x}} = 40$$

$$\frac{160}{\sqrt{x}} = 40$$

(Bedingung 1. Ordnung)

Aufgabe 9.4.1 von Seite 406

Bestimme das Maximum und das Minimum und zeichne den Graphen von

$$f(x) = \underset{>0}{4}x^2 - 40x + 80, \text{ für } x \in [0, 8].$$

$\Rightarrow f$ ist streng konvex

$$= 4(x^2 - \overset{2\cdot 5}{10}x + 20)$$

$$= 4(x^2 - 2\cdot 5x + 25 - 5)$$

$$= 4((x-5)^2 - 5) \geq 4((5-5)^2 - 5) = -20$$

$\Rightarrow x = 5$ Min-Stelle, $f(5) = -20$ Min-Wert.

$$f'(x) = 8x - 40 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 8x = 40 \Leftrightarrow x = 5 \in (0, 8)$$

$f''(x) = \underset{2\cdot 4}{8} > 0$ f streng konvex $\Rightarrow x = 5$ Min-Stelle.

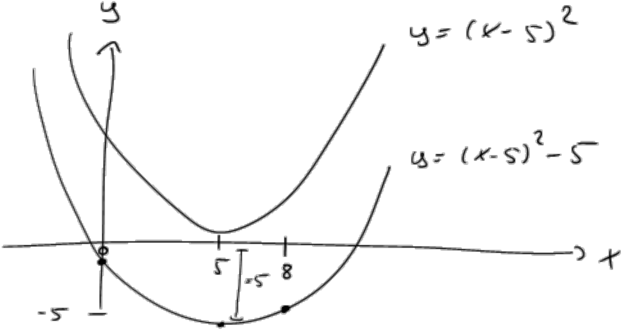
Überprüfe $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

$$f(x_1) = 4 \cdot 0^2 - 40 \cdot 0 + 80 = 80$$

$$f(x_2) = \underbrace{4}_{2\cdot2} \cdot \underline{8}^2 - \underbrace{40}_{2\cdot2} \cdot \underline{8} + \underbrace{80}_{2\cdot8\cdot5} = 16\,(2\cdot8 - 20 + 5)$$

$$= 16\,(16 - 20 + 5) = 16$$

Max-Stelle: $x_1 = 0$ $f(x_1) = 80$



Ökonomische Anwendung: Kostenminimierung

Produktionsfunktion $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$

$x, y \geq 0$: Inputmengen.

Kostenfunktion $c(x,y) = 2 \cdot x + 4y$

Auftrag: produziere $z = 5$ Einheiten des Outputs.

1. Kostenminimum x^*, y^* ?

2. welchen Preis pro Einheit des Outputs ?

$$\min_{x,y \geq 0} \; 2 \cdot x + 4 \cdot y \quad \text{unter der Bedingung} \quad x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = 5$$

Forme Nebenbedingung um: $x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = 5 \quad | \; ^{\wedge}(3)$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 125$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^{\frac{1}{3}\cdot 3}\right) \cdot \left(y^{\frac{2}{3}\cdot 3}\right) = 125$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot y^2 = 125 \quad | : x$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{125}{x} \quad | \sqrt{}$$

$(x, y \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{125}{x}} = \sqrt{125} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Minimiere $\quad 2x + 4 \cdot \sqrt{125}\, x^{-\frac{1}{2}}$

$x \geq 0$

→ Setze in Zielfunktion ein

$$C(x,y) = 2x + 4 \cdot y$$

$$\Rightarrow \quad \hat{C}(x) = 2x + 4 \cdot \sqrt{125} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

Bedingung 1. Ordnung

$$\hat{C}'(x) = 2 + 4 \cdot \sqrt{125} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 2 - 2 \cdot \sqrt{125} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2} = \cancel{2} \sqrt{125} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \qquad 1 \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{125} = (125)^{\frac{1}{2}} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 5} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$$

Bedingung 2. Ordnung

$$\hat{C}''(x) = -2 \cdot \sqrt{125} \cdot \left(-\tfrac{3}{2}\right) x^{-\frac{5}{2}} = 3 \cdot \sqrt{125} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \underbrace{3 \cdot \sqrt{125}}_{>0} \; \underbrace{\frac{1}{x^{5/2}}}_{>0} > 0$$

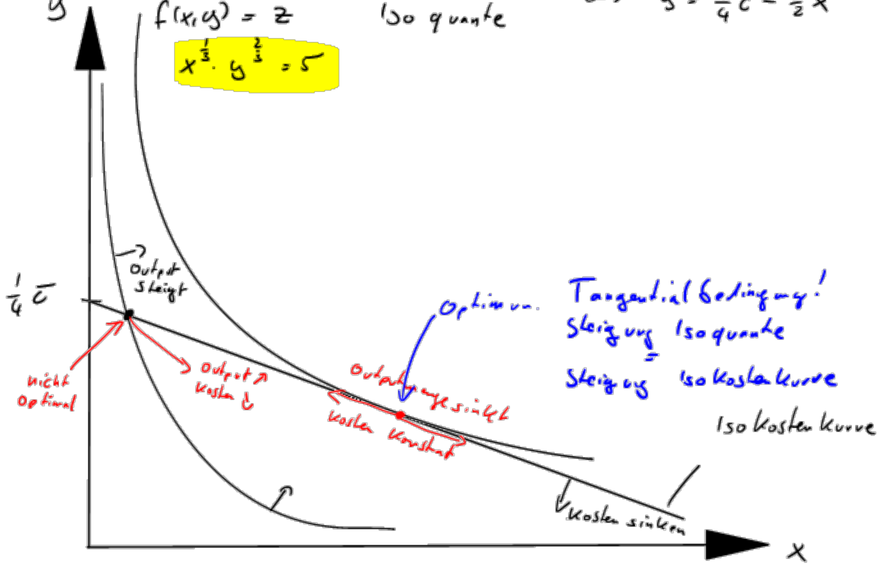
$\Rightarrow$ $\hat{C}$ ist streng konvex ✓

Graphische Darstellung

$C(x,y) = \boxed{2x + 4y = \overline{C}}$

$\Leftrightarrow \quad 4y = \overline{C} - 2x$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4}\overline{C} - \frac{1}{2}x$



Isoquante: $x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = 5$

Steigung: $y' = \frac{dy}{dx}$

Leite beide Seiten nach x ab:

Produktregel!

$$\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{2}{3}} \right)' = 0$$

Kettenregel!

Ableitung

äußere

innere

$$\cancel{\frac{1}{3}} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \cdot y^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^{\frac{1}{3}} \cdot 2\, y^{-\frac{1}{3}}} \frac{dy}{dx} = -x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad \Big| :2 \quad \cdot x^{-\frac{1}{3}} \quad \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-1} \cdot y^{1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

Isokostenkurve $2x + 4y = \bar{c}$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4}\bar{c} - \frac{1}{2}x$$

Steigung

Tangentialbedingung:

$$\boxed{-\frac{1}{2}\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 9.6.5 von Seite 420

Sei

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Welche Forderungen müssen an die Konstanten a, b und c gestellt werden, damit die Funktion

a) ein lokales Minimum an der Stelle $x = 0$ hat?

b) stationäre Stellen in $x = 1$ und $x = 3$ hat?

Aufgabe 9.6.6 von Seite 420

Bestimme die lokalen Extremstellen für

a) $f(x) = x^3 e^x$

b) $g(x) = x^2 2^x$